

Estudio del efecto Compton de un haz de fotones en interacción con la materia

González Nuño Eduardo Patricio, Hernández Ordoñez Martín, López Hernández Juan, Mesa Linares Francisco y Calles Arriaga Carlos Adrian

Universidad Politécnica de Victoria, Ciudad Victoria, Tamaulipas, México.
Av. Nuevas Tecnologías 5902. Parque Científico y Tecnológico de Tamaulipas. Carretera Victoria-Soto la Marina K.m. 5.5, C.P. 87138, Tel. (834) 1711100 al 10

Resumen

En este trabajo se muestra la deducción de las ecuaciones matemáticas que describen el efecto Compton. Se presentan condiciones de simulación para comprobar numéricamente el comportamiento del modelo y se discuten los resultados de simulación con respecto a datos generados en la calibración de un acelerador lineal. Finalmente se establecen criterios para extender a futuro estos resultados para obtener un modelo que considere el efecto Compton en tres dimensiones. El presente trabajo constituye la base teórica para el desarrollo de equipos mecatrónicos con aplicaciones en el área biomédica basados en el efecto Compton y se acota al estudio de dos dimensiones.

Palabras clave: Modelado, Compton, radiación, fotón e interacción con la materia.

1. Introducción

Actualmente, las aplicaciones de las técnicas de análisis, diseño, instrumentación y automatización han venido a dar soluciones de impacto en diferentes campos del conocimiento. La mecatrónica es un área de integración de conocimientos y técnicas que dan una opción tecnológica de solución a problemas multidisciplinarios. En particular, el uso de la filosofía de diseño mecatrónico es poco usado en el campo de la física médica. Sin embargo, es un área de oportunidad para realizar investigación y desarrollo tecnológico desde el punto de vista de la automatización. Los equipos de calibración y los protocolos de tratamiento para el cáncer carecen de sistemas que automaticen dichos procesos. Aún más, es escasa la información respecto a modelos matemáticos de efectos físicos fundamentales en la calibración del equipo.

Las nuevas tecnologías han hecho grandes cambios en las terapias de radiación. Entender los efectos del paso de la radiación a través de la materia es muy importante, particularmente con los aspectos relacionados con la protección radiológica y la medición de la radiación. El efecto Compton permite medir la intensidad de los rayos *gamma*, lo que resulta de gran utilidad en la calibración de aceleradores lineales que son utilizados en el tratamiento y diagnóstico del cáncer. Por otra parte, los aceleradores lineales sirven para generar energía no ionizante para el tratamiento de cáncer, por eso es muy importante la forma en que se calibran. Las gráficas generadas en experimentos de calibración son muy similares a las propuestas por Compton en sus estudios en dos dimensiones.

Con este trabajo se pretende deducir, analizar y simular las ecuaciones de Compton a partir de la ecuación de la relatividad de Einstein, esto con la finalidad de poder determinar un procedimiento similar al establecido por Compton y obtener una mejor aproximación del efecto.

2. Marco teórico

2.1 Fundamentos básicos

Al hablar de radiación nos referimos a ciertas formas de energía que se transmiten o propagan a través del espacio o de un medio. Las ondas electromagnéticas se caracterizan por la existencia de campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de la onda y representan ejemplos de radiaciones no ionizantes. Cuando la energía viaja a la velocidad de la luz en forma de paquetes (cuantos) a estos paquetes se les llama fotones y se representan como $h\nu$, en donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia con la que viajan las ondas de energía, esta frecuencia es la

que nos permite diferenciar entre la luz visible y los demás tipos de energía, **Fig. 2.1**.



Fig. 2.1. Ondas de energía a diferentes frecuencias

2.2 Interacciones de las radiaciones con la materia

Existen cuatro principales tipos de interacciones: (i) La dispersión coherente se produce cuando al chocar una onda electromagnética de baja energía con el átomo esta sale disparada en un ángulo diferente pero con la misma energía, (ii) en el efecto fotoeléctrico un electrón de cualquier nivel puede ser expulsado creando un vacío, este vacío puede ser llenado por un electrón externo, dando pie a la emisión de rayos X, (iii) la formación de pares en la cual si la energía de un fotón es mayor a 1.02 MV el fotón puede interactuar a través de un mecanismo de producción de par, en este proceso el fotón interactúa con el campo electromagnético, creando un par que consiste de un electrón negativo (e-) y un electrón positivo (e+) y el resto de la energía de la masa del electrón es equivalente a 0.51 MV (iv) y por último el efecto Compton en el cual el fotón interactúa con el electrón atómico, el electrón recibe la energía suficiente para excitarse y salir expulsado en un ángulo θ y el resto de la energía del fotón es dispersado en un ángulo ϕ , como lo muestra la figura 2.2.

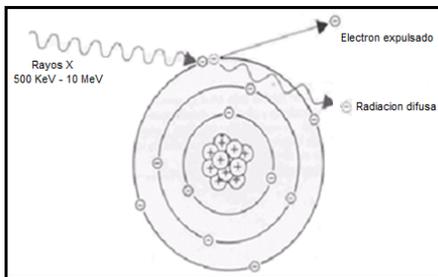


Fig. 2.2. Efecto Compton

2.3 Estado del arte

La mayoría de los trabajos relacionados a los efectos de la radiación utilizan plataformas basadas en el método de Montecarlo para simular el efecto Compton (MatLab y/o Simulink).

Arqueros y Montesinos [1] desarrollaron un algoritmo para la simulación de fotones de 1 MeV, este permite la interpretación y visualización de la

interacción de la radiación con la materia, así como el cálculo de parámetros físicos relacionados con el efecto Compton. Dicho algoritmo se ejecuta con datos de entrada obtenidos aleatoriamente para la primer interacción, si el dato está dentro del medio el algoritmo selecciona entre el proceso fotoeléctrico y el Compton, a partir del segundo comienza a calcular los parámetros de salida, sucesivamente hasta que la energía restante queda fuera del medio. Pazirandeh y Ebrahimi [2] estudiaron el uso de la transformada *wavelet* para la extracción de características asociadas con el espectro *gamma* que corresponde al pixel de la imagen y su clasificación en comparación con otras transformaciones. Para esto realizaron un experimento con un *scintillator crystal* con el cual obtuvieron el espectro de los rayos *gamma* de diferentes materiales. Los datos fueron convertidos a formato Excel e importados a MatLab como una matriz para obtener la imagen del espectro y después compararla con el espectro de otros materiales. Al comparar las imágenes pudieron concluir que con la técnica de análisis por *wavelet* es posible reconocer las propiedades de los objetos y así mejorar las imágenes médicas. S. Velázquez y R. Velázquez [3] modelaron y simularon variables aleatorias por medio de Simulink para comprobar la efectividad del método Montecarlo. Realizaron una simulación simultánea con dos generadores de números aleatorios extraídos de las herramientas del *software*, creando funciones de densidad de probabilidad, comprobando que tienen la forma gaussiana como se establece teóricamente. Posteriormente realizaron un experimento en una cartera financiera utilizando esta herramienta y demostrando que MatLab reproduce exactamente el análisis de Montecarlo, el cual resulta muy efectivo en situaciones donde obtener la distribución de probabilidad es realmente complejo.

En [4] obtuvieron perfiles del haz de un acelerador lineal clínico para un haz de fotones de 10 MV en agua usando un Programa de Simulación Monte Carlo (MCSP). Este se llevó a cabo contando las interacciones de los fotones con la materia en MATLAB. Los resultados que obtuvieron de la simulación y los resultados experimentales son muy parecidos y determinaron que el MCSP tiene un enfoque prometedor en la medición de dosis para haz de fotones de 10 MV.

El propósito del presente trabajo es deducir y modelar las ecuaciones del efecto Compton y establecer la posibilidad de usar los mismos criterios para modelar el efecto de las radiaciones en tres dimensiones al interactuar con la materia, sin embargo el presente estudio no aborda la deducción en tres dimensiones. El trabajo será desarrollado con

ayuda de un lenguaje de Alto Nivel (MatLab) bajo un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación del efecto de interés.

3. Metodología

Con el propósito de modelar y simular el efecto Compton para un haz de fotones en tres dimensiones, es necesario primero recrear el modelo en dos dimensiones y simularlo con ayuda de *software* matemático.

3.1 Recreación del modelado en dos dimensiones

Como primer paso se desarrollara el modelo propuesto por Compton en dos dimensiones. Basados en este modelo y considerando el haz de fotones incidentes como partículas que chocan contra los electrones de los átomos que se van a irradiar, **Fig 3.1**

Como segundo paso se programarán las ecuaciones generadas de la deducción matemática y se simularan en MatLab para obtener una solución numérica del análisis de dichas ecuaciones. Se propone realizar un barrido de ángulos ϕ desde 1 hasta 90 grados para determinar el ángulo adecuado para usarlo en las simulaciones del efecto Compton. Las simulaciones con

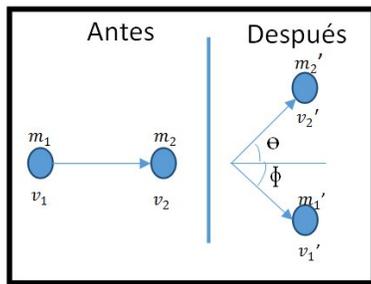


Fig. 3.1. Efecto Compton considerando al fotón como una partícula

un ángulo adecuado dará evidencia del comportamiento de la energía del electrón E y la energía residual $h\nu$. El proceso Compton puede ser analizado en términos de una colisión entre dos partículas, un fotón y un electrón. Aplicando la ley de la conservación del *momentum* (P) que es equivalente a la masa por la velocidad de la partícula ($m\nu$), y tomando en cuenta que son vectores tenemos:

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_e' + \vec{P} \rightarrow \vec{P}_e' = \vec{P}_0 - \vec{P} \quad (1)$$

Donde \vec{P}_0 es la cantidad de movimiento de la energía incidente \vec{P}_e' , es la cantidad de movimiento del electrón después del choque y \vec{P} es la cantidad de movimiento de la energía residual.

Elevando la ecuación 1 al cuadrado tenemos:

$$P_e'^2 = (\vec{P}_0 - \vec{P})^2 = P_0^2 - 2\vec{P}_0 \cdot \vec{P} + P^2$$

Como el producto punto A y B es $A \cdot B = AB \cos \theta$, entonces:

$$P_e'^2 = P_0^2 - 2P_0P \cos \phi + P^2 \quad (2)$$

Al aplicar esta fórmula es importante observar que el ángulo ϕ es el vértice entre estos dos vectores, como lo muestra la figura 3.2.

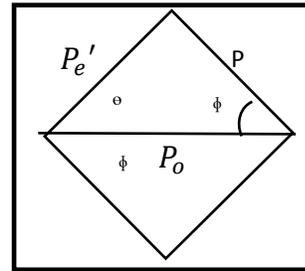


Fig. 3.2 Ángulo ϕ , entre los vectores P_0 y P

También podemos aplicar la ley de la conservación de la energía de la forma:

$$E_0 + E_e = E_e' + E_r$$

Entonces:

$$E_e' = E_0 + E_e - E_r$$

Elevando la ecuación al cuadrado se tiene:

$$E_e'^2 = (E_0 + E_e - E_r)^2$$

$$E_e'^2 = E_0^2 + E_e^2 + E_r^2 + 2E_0E_e - 2E_0E_r - 2E_eE_r$$

$$E_e'^2 = E_0^2 + E_e^2 + E_r^2 + 2E_e(E_0 - E_r) - 2E_0E_r$$

Partiendo de $E_e'^2 = P_e'^2 c^2 + m^2 c^2$ y elevando la ecuación al cuadrado se tiene:

$$\begin{aligned} m^2 c^4 + P_e'^2 c^2 &= (cP_0)^2 + (mc^2)^2 + (cP)^2 + \\ &+ 2mc^2(cP_0 - cP) - 2(cP_0)(cP) \\ m^2 c^4 + P_e'^2 c^2 &= c^2 P_0^2 + m^2 c^4 + c^2 P^2 + \\ &+ 2mc^3 P_0 - 2mc^3 P - 2c^2 P_0 P \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación entre c^2 queda:

$$P_e'^2 = P_0^2 + P^2 + 2cmP_0 - 2cmP - 2P_0P \quad (3)$$

Igualando las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} P_0^2 - 2P_0 P \cos \phi + P^2 &= P_0^2 + \\ &+ P^2 + 2cmP_0 - 2cmP - 2P_0P \\ 2P(P_0 \cos \phi - P_0 - mc) &= -2mcP_0 \end{aligned}$$

Despejando P queda:

$$P = \frac{-mcP_0}{P_0(\cos \phi - 1) - mc} \quad (4)$$

Sabemos que el *momentum* P es proporcional a la constante de *Planck* h multiplicada por la frecuencia ν y dividida entre la velocidad de la luz $P = \frac{h\nu}{c}$. Por lo cual se deduce que $P_0 = \frac{h\nu_0}{c}$. Sustituyendo estos dos valores en la ecuación 4 y multiplicando por c/c se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{-mc \frac{h\nu_0}{c}}{\frac{h\nu_0}{c}(\cos \phi - 1) - mc} \cdot \left(\frac{c}{c}\right) \\ h\nu &= \frac{-mc^2 h\nu_0}{h\nu_0(\cos \phi - 1) - mc^2} \end{aligned}$$

Introduciendo $\alpha = \frac{h\nu_0}{mc^2}$ o bien $mc^2 = \frac{h\nu_0}{\alpha}$

$$h\nu = \frac{-\frac{h\nu_0}{\alpha}(h\nu_0)}{h\nu_0(\cos \phi - 1) - \frac{h\nu_0}{\alpha}}$$

$$h\nu = \frac{-\frac{h\nu_0}{\alpha}}{(\cos \phi - 1) - \frac{1}{\alpha}}$$

Multiplicando por $-\alpha$

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 - \alpha(\cos \phi - 1)}$$

$$h\nu = h\nu_0 \left(\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \phi)} \right) \quad (5)$$

La expresión 5 es llamada ecuación de Compton para obtener la energía residual.

Por otro lado, utilizando la ley de la conservación de la energía se puede decir que:

$$E_0 + E_e = E_e' + E_r$$

$$h\nu_0 + m^2 c^2 = m^2 c^2 + E + h\nu$$

$$h\nu_0 = E + h\nu$$

$$E = h\nu_0 - h\nu$$

Sustituyendo $h\nu$

$$E = h\nu_0 - h\nu_0 \left(\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \phi)} \right)$$

$$E = h\nu_0 \left(\frac{1 + \alpha(1 - \cos \phi) - 1}{1 + \alpha(1 - \cos \phi)} \right) \quad (6)$$

La expresión 6 es llamada ecuación de Compton para obtener la energía del electrón.

3.1 Simulación en dos dimensiones

Una vez obtenidas las ecuaciones se procederá a realizar las simulaciones con ayuda de MatLab. Primero se propone hacer un barrido de ángulos, para determinar con qué ángulo ϕ se harán la simulación; y posteriormente se hará la simulación de las ecuaciones con un ángulo propuesto arbitrariamente.

El código utilizado se muestra a continuación:

4. Análisis de resultados

Los resultados obtenidos están relacionados con la deducción de las ecuaciones de Compton a partir de las leyes de la conservación del *momentum*, la energía y la ecuación de la relatividad de Einstein. Después se obtuvo la gráfica del barrido de frecuencia. La Fig. 4.1 permite observar y designar el ángulo con el cual se realizaron las simulaciones del efecto Compton en dos dimensiones.

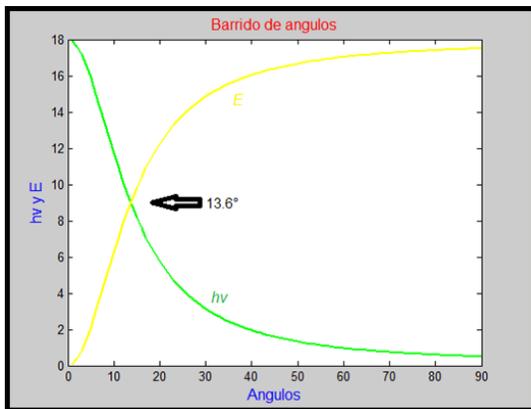


Fig. 4.1 Resultados de simulación donde se observa el ángulo ϕ , entre los vectores P_0 y P

Como se puede ver, el ángulo propuesto arbitrariamente es de 13.6° que es el ángulo en el cual tanto la energía del electrón E y la energía del fotón residual hv son iguales.

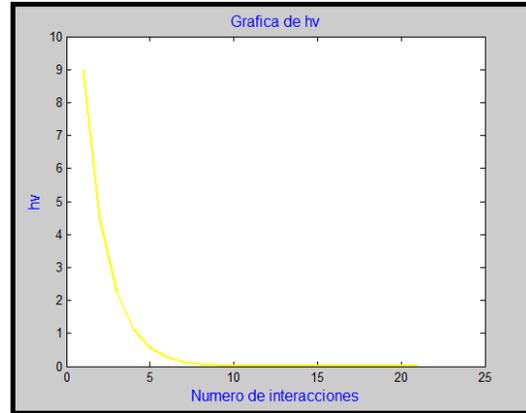


Fig. 4.2 Número de iteraciones contra hv

Cabe mencionar que se pudo tomar cualquier otro ángulo, y obtener una gráfica de energía igual.

Por último se hizo la simulación de las ecuaciones para diferentes interacciones del fotón con la materia. Esto significa que el fotón interactúa con la materia, tantas veces como se lo permite su energía (ver Fig. 4.2.)

5. Conclusiones y discusiones

Después de obtener las ecuaciones de Compton, se procedió a la simulación de dichas ecuaciones. Al observar en el barrido de ángulos que había un punto en el que ambas energías eran iguales, se procedió a tomar ese valor arbitrariamente. El ángulo tomado para la simulación tiene un valor de 13.6° . Al examinar el diagrama de energía residual con este ángulo y para varias interacciones, se llegó a la conclusión de que las ecuaciones obtenidas generan la dinámica de energía de un cuerpo en un acelerador lineal. La gráfica generada por un acelerador lineal es la suma de ambas energías, la residual y la del electrón, lo cual provoca un pequeño traslape. Al comprobar que las ecuaciones de Compton son fiables, se puede determinar que es muy factible poder modelar el comportamiento de la radiación al interactuar con la materia en tres dimensiones.

Como trabajo futuro se abordará el desarrollo de un modelo matemático que describa el efecto Compton en tres dimensiones. Además, a partir de estos resultados se diseñarán protocolos e instrumentación mecatrónica para la calibración automática del acelerador de partículas con aplicación al tratamiento del cáncer.

Referencias

- [1] Arqueros and Montesinos, “A simple algorithm for the transport of Gamma rays in a medium”, Am. J. Phys., 71, 38-45, 2003.
- [2] Ali Pazirandeh and Saman Ebrahimi, “Gamma-ray Compton spectrum analysis to enhance medical image using wavelet transformation”, Natural Science, Vol. 3,11, 963-970, 2011.
- [3] Velázquez S. y Velázquez R., “Modelado con variables aleatorias en Simulink utilizando simulación Montecarlo”, Universidad, Ciencia y Tecnología, Vol. 16, 64, 203-211, 2012.
- [4] Ahmet Tartar, “Monte Carlo simulation of 10 MV photon beams and beam profile validation”, Measurement, Elsevier, Vol. 46, 9, 3026-3031, 2013.