12º Congreso Nacional de Mecatrónica, ISBN 978-607-95347-8-3
Octubre 10 y 11, 2013. León, Guanajuato.

Modelo cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional.

Alvarado-Juarez Diego Armando, Villarreal-Cervantes Miguel Gabriel, Sepúlveda-Cervantes Gabriel

Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo – Instituto Politécnico Nacional.

Resumen

En este trabajo se presenta el análisis cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional utilizando la formulación Euler-Lagrange. Se propone el uso del análisis de fuerza del sistema para la obtención de los pares aplicados en las ruedas con el propósito de obtener la trayectoria deseada en el robot móvil. El modelo obtenido es validado con el uso de MatLab – Simulink.

Palabras clave: Robot Móvil, Omnidireccional, Modelo Dinámico, Modelo Cinemático.

1. Introducción

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, restringido inicialmente al alcance de una estructura mecánica anclada en uno de sus extremos. En la actualidad se trata de que el robot móvil tenga la suficiente inteligencia como para reaccionar y tomar decisiones basándose en observaciones de su entorno, sin suponer que este entorno es totalmente conocido, y en los conocimientos que tenga de su propio funcionamiento y capacidades, basándose en su modelo cinemático y dinámico[1].

Un robot móvil omnidireccional es aquel que, debido a la configuración de sus ruedas, es capaz de moverse en cualquier dirección en cualquier instante de tiempo, y simultáneamente adquirir cualquier orientación. Estas condiciones de movimiento son su principal ventaja sobre los tipos restantes de robots móviles, pero también dificultan el análisis de su comportamiento cinemático y dinámico. Este trabajo se presenta como una alternativa de análisis para este tipo de sistemas.

La cinemática es la ciencia que estudia la posición, la velocidad, la aceleración y todas las demás derivadas de alto orden de las variables de posición (con respecto al tiempo o cualquier otra variable) tomando en cuenta su geometría y sin considerar fuerzas que producen este movimiento [2]. En [3] se realiza el modelo cinemático de un móvil omnidireccional inusual, ya que se llevó a cabo con el robot Rovio de la empresa WowWee, el cual tiene 3 ruedas actuadas y una configuración triangular no equilátera.

Para el análisis dinámico del robot móvil se estudian las fuerzas y velocidades ejercidas por las ruedas y el efecto que causan en el movimiento del robot. Resulta complicado tener en cuenta todos los efectos que se producen en el móvil, como por ejemplo la interacción con la superficie en donde se desempeña el robot, lo cual dificulta la controlabilidad del sistema. De ahí la importancia de un modelo cinemático y dinámico preciso que se apegue al funcionamiento y desempeño real del robot móvil. La fiabilidad o exactitud requerida de dicho modelado dependerá directamente de la tarea que se quiere realizar, por ejemplo, en [4] se propone un algoritmo de control de movimiento coordinado de múltiples manipuladores móviles manejando un objeto sin el uso de sensores de fuerza, basados únicamente en el modelo dinámico real de cada manipulador móvil, por lo tanto, en este caso en particular, resulta imperante la fiabilidad del modelo. En [5] se plantea el uso de manipuladores móviles para el desarrollo de tareas de ensamblaje, y se incluyen todas las incertidumbres generadas por los modelos a los sistemas de control, y aunque resulta un sistema fiable, la carga computacional generada es bastante. En [6] se integra la dinámica asociada a un manipulador paralelo y a un robot móvil omnidireccional para obtener un modelo dinámico que asocie los efectos de los dos subsistemas.

Para poder controlar un sistema de manera óptima, resulta imprescindible el uso de los modelos cinemáticos y dinámicos, y que tan apegados estén a la realidad dichos modelos dependerá de la experiencia del desarrollador. En la Sección II de este artículo se hace el desarrollo del modelo cinemático del sistema. En la Sección III se hace el análisis de la relación entre el par ejercido en las ruedas y el obtenido en el sistema por consecuencia, el cual será necesario para el análisis dinámico que se realiza en la Sección IV para la obtención del modelo dinámico del sistema. Dicho modelo es probado mediante simulación en la Sección V con 3 casos de movimientos básicos.

2. Análisis cinemático.

En un robot móvil, la cinemática se centra en el estudio del movimiento del robot en función de su geometría y el movimiento de sus llantas. Entre las aplicaciones de este tipo de modelos, se encuentra la posibilidad de utilizarlo como modelo matemático de partida para el diseño del controlador, la simulación del móvil, etc. Siendo así, que la cinemática directa tiene como objetivo el cálculo de la velocidad lineal y angular del robot a partir de las correspondientes aportaciones de cada una de las ruedas.

Para la construcción del modelo cinemático se consideran las siguientes limitaciones:

• El robot se mueve sobre una superficie plana.
• No existen elementos flexibles en la estructura del robot.

Para poder determinar las posiciones y orientaciones relativas de cada uno de los componentes del robot se establecen los dos sistemas coordenados principales del mismo, como se muestra en la Figura 1. Se expresa como {W} al sistema coordenado general. {m} es el sistema de coordenadas asociado al centro de masa del robot. Su posición cartesiana $[X_m, Y_m]$ y su orientación $\emptyset_m$ son con respecto al sistema global de trabajo {W}, $\{\dot{X}_m, \dot{Y}_m, \dot{\emptyset}_m\}$ son la velocidad lineal del móvil, y la velocidad angular del móvil, respectivamente, {N1,N2,N3} son el punto de contacto asociado a cada una de las ruedas del móvil omnidireccional.

Se considera que el móvil se mueve solo por acción de sus ruedas, sin deslizamientos, con una velocidad tangente a la rueda.

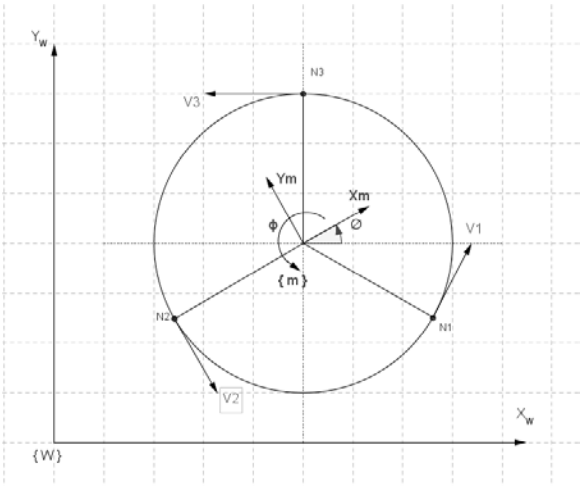


Fig. 1 Diagrama esquemático del robot móvil omnidireccional.

Es importante mencionar que el orden de los sistemas y la numeración de las llantas dependerá del caso de estudio, y esto se debe tener en cuenta al obtener el modelo cinemático. Considerando la ecuación de movimiento de dos puntos en un cuerpo rígido de acuerdo a la Figura 2.

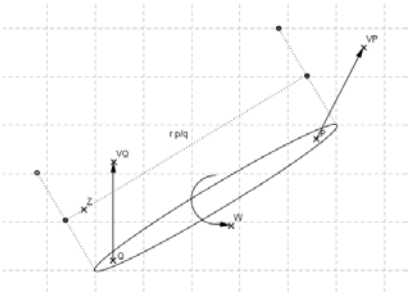


Fig. 2 Ecuación de movimiento de dos puntos en un cuerpo rígido.

Se tiene que la velocidad en el punto P estará dada por la siguiente ecuación:

$$V_p = V_Q + W \times r_{P/Q} \qquad (1)$$

dónde: V_p.- es el vector velocidad del punto P, V_Q.- es el vector velocidad del punto Q, W.- es la velocidad angular del cuerpo y $r_{P/Q}$.- la distancia del punto P al punto Q.

Esta ecuación se relaciona con cada uno de los puntos de contacto de las llantas con el suelo, y el punto central asociado al centro de masa de acuerdo a la Figura 3.

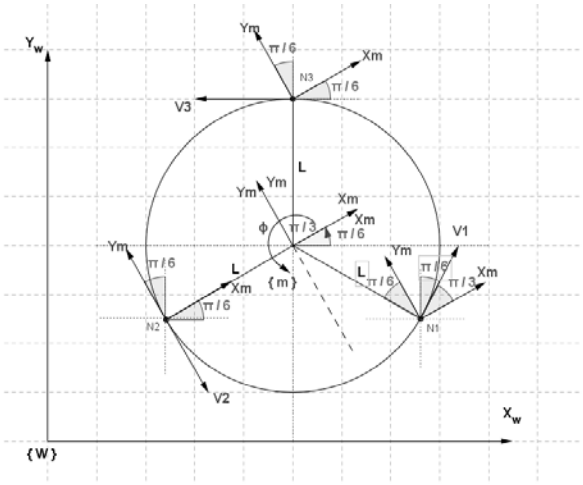


Fig. 3 Velocidades de las ruedas.

Desarrollando las ecuaciones de cada una de las ruedas con respecto al centro de masa, considerando $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, y construyendo la matriz que relaciona las velocidades de las ruedas con la velocidad lineal y angular del móvil, quedando de la siguiente manera:

$$\bar{V} = \bar{A}^T \dot{\eta}_m \qquad (2)$$

dónde:

$$\bar{V} = [V_i, V_i, V_i]^T, \quad V_i = \dot{\phi}_i r, \bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ L & L & L \end{bmatrix} y$$

$$\dot{\eta}_m = [\dot{X}_m \quad \dot{Y}_m \quad \dot{\phi}_m]^T$$

3. Análisis de fuerzas y pares.

La fuerza que genera el móvil, es descrita por la suma de fuerzas generadas por las llantas al moverse sobre los ejes del móvil. Ya que las fuerzas generadas por las llantas tienen diferentes direcciones, se hacen sus proyecciones sobre los ejes del móvil. Al final tendremos una resultante en el eje X y otra en el eje Y como se muestra en la Figura 5. El par generado por el móvil es simplemente una suma de momentos generados por las ruedas con respecto al centro de masa del móvil, el cual puede ser expresado como en ()

$$F_{m_x} = F_{r_1}\frac{\sqrt{3}}{2} - F_{r_3}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

$$F_{m_y} = F_{r_1}\sin\frac{1}{2} - F_{r_2} + F_{r_3}\sin\frac{1}{2} \qquad (4)$$

$$\tau_m = F_{r_1}L + F_{r_2}L + F_{r_3}L \qquad (5)$$

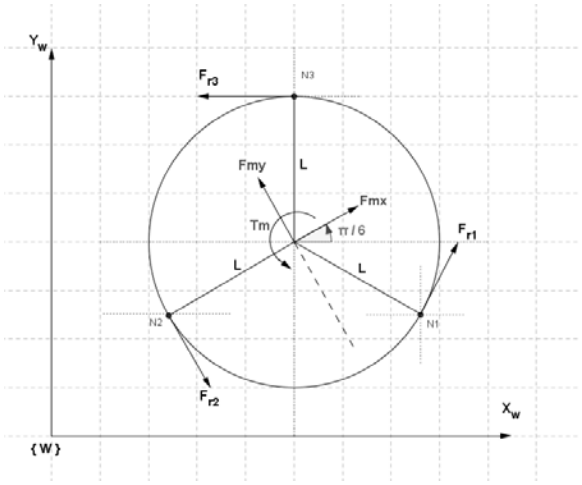


Fig. 4 Fuerzas generadas por las ruedas.

Con estas ecuaciones se puede construir la matriz que relaciona la fuerza generada por las ruedas y su efecto en la fuerza y par del móvil, quedando:

$$F_m = \bar{A}\bar{F}_r \qquad (6)$$

Dónde: $F_m = [F_{m_x} \quad F_{m_y} \quad \tau_m]^T \quad y$
$\bar{F}_r = [F_{r_1} \quad F_{r_2} \quad F_{r_3}]^T$

4. Análisis Dinámico.

En el modelo dinámico del móvil se considera el cambio de posición, velocidad y aceleración del robot en respuesta a los pares de actuación ejercidos en la ruedas. Para este análisis se toman en cuenta las mismas consideraciones que en el análisis cinemático. No se toma en cuenta el efecto de la gravedad en el móvil ya que se considera que el vehículo viaja por una superficie plana y horizontal.

Para comenzar se debe tener en cuenta el conjunto de fuerzas que interactúan con las ruedas del móvil, las cuales están descritas en la Figura 5.

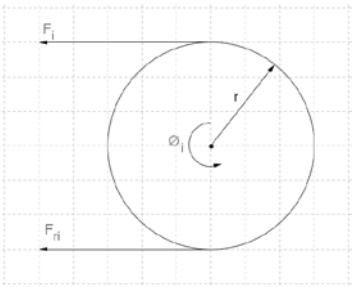


Fig. 5 Dinámica de la Rueda.

Dónde:
F_i.- Fuerza externa aplicada en la periferia de la rueda.

F_{r_i}.- Fuerza de rozamiento estatico.

Realizando una suma de momentos en el origen de la rueda, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum M_{O_I} = J\ddot{\theta}_i \tag{7}$$

$$\tau_i - F_{r_i} r_i = J\ddot{\theta}_i \tag{8}$$

Donde: $\tau_i = F_i r_i$

Obteniendo:

$$\bar{\tau} - \bar{F}_r r = \ddot{\theta} J \tag{9}$$

Dónde:

J.- Momento de inercia de la rueda.
$\ddot{\theta}_i$.- Aceleración angular de la rueda.
$\ddot{\theta} = \left[\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3\right]^T$
$\bar{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$
$\bar{F}_r = \left[F_{r_1}, F_{r_2}, F_{r_3}\right]^T$
r.- Radio de la rueda.

Una vez analizada la dinámica de la rueda se puede seguir con el análisis dinámico del móvil de acuerdo a la Figura 6 y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener dicho modelo.

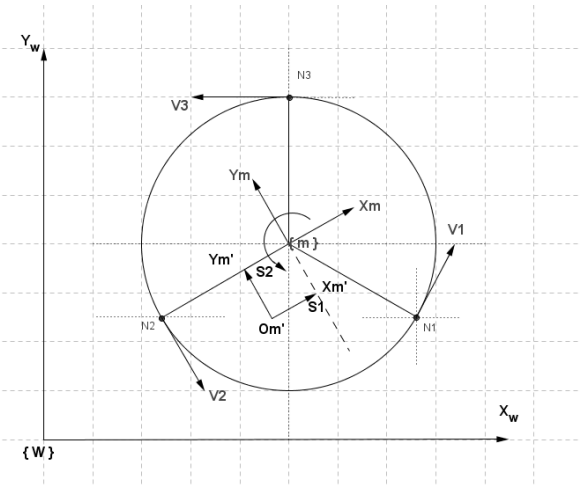


Fig. 6 Análisis de Velocidades.

Se utiliza la siguiente ecuación para la velocidad del centro de masa: $V_{cm} = V_m + w_m \times P_{cm}$

Obteniendo:

$$V_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{X}_m \\ \dot{Y}_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_m - \dot{\theta}_m S_2 \\ \dot{Y}_m + \dot{\theta}_m S_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida dicha velocidad, se sustituye en la formulación de Euler-Lagrange diseñada para la obtención del modelo dinámico del sistema [7], la cual esta descrita de la siguiente manera:

$$L = K - U \tag{10}$$

Dónde:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i\left(q(t), \dot{q}(t)\right)$$
$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i\left(q(t)\right)$$
$$K_i = \frac{1}{2} m_i V_{cm}^T V_{cm} + \frac{1}{2} w_i I_i w_i$$

Sustituyendo en 22 para encontrar el Lagrangiano del sistema:

$$L = \tfrac{1}{2} m\left(\dot{X}_m^2 - 2\dot{X}_m \dot{\theta}_m S_2 + \dot{\theta}_m^2 S_2^2 + Y_m^2 + 2\dot{Y}_m \dot{\theta}_m S_1 + \dot{\theta}_m^2 S_1^2\right) + \tfrac{1}{2} I_Z \dot{\theta}_m^2 \tag{11}$$

Considerando $\eta_m = [X_m \quad Y_m \quad \theta_m]$, las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_m} = F_m \tag{12}$$

Una vez realizadas las derivadas parciales y totales, se considera $\{O_m\} = \{O_m'\}$, $S_1 = S_2 = 0$, $\dot{S}_1 = \dot{X}_m$, $\dot{S}_2 = \dot{Y}_m$, resultando en (17).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_m}\right) = \begin{bmatrix} m\ddot{X}_m - m\dot{\theta}_m \dot{Y}_m \\ m\ddot{Y}_m - m\dot{\theta}_m \dot{X}_m \\ I_z \ddot{\theta}_m \end{bmatrix} \tag{13}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & Iz \end{bmatrix} \ddot{\eta}_m + \begin{bmatrix} 0 & -m\dot{\theta}_m & 0 \\ -m\dot{\theta}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\eta}_m = \bar{A}\bar{F}_r$$

$$M\ddot{\eta}_m + H\dot{\eta}_m = \bar{A}\bar{F}_r \tag{14}$$

Incluyendo la dinámica de la rueda en (14) y despejando $\bar{F}_r$:

$$\bar{F}_r = \frac{\bar{\tau}}{r} - \bar{A}^T \ddot{\eta}_m \frac{J}{r^2} \quad (15)$$

Entonces:

$$M\ddot{\eta}_m + H\dot{\eta}_m = \bar{A}\left(\frac{\bar{\tau}}{r} - \bar{A}^T \ddot{\eta}_m \frac{J}{r^2}\right) \quad (16)$$

$$\left(M + \bar{A}\bar{A}^T \frac{J}{r^2}\right)\ddot{\eta}_m + H\dot{\eta}_m = \frac{\bar{A}\bar{\tau}}{r} \quad (17)$$

Considerando $\bar{B} = \frac{\bar{A}}{r}$ y $\bar{M} = \left(M + \bar{A}\bar{A}^T \frac{J}{r^2}\right)$, y sustituyendo en (17) entonces:

$$\bar{M}\ddot{\eta}_m + H\dot{\eta}_m = \bar{B}\bar{\tau} \quad (18)$$

Para proyectar el modelo en el marco inercial $\{O_w\}$ se considera:

$$\dot{\eta}_m = {}^w_m R^T \dot{\eta}_w \quad (19)$$

$$\ddot{\eta}_m = {}^w_m \dot{R}^T \dot{\eta}_w + {}^w_m R^T \ddot{\eta}_w \quad (20)$$

Sustituyendo (19) y (20) en (18):

$$\bar{M}\left({}^w_m \dot{R}^T \dot{\eta}_w + {}^w_m R^T \ddot{\eta}_w\right) + H({}^w_m R^T \dot{\eta}_w) = \bar{B}\bar{\tau} \quad (21)$$

Resolviendo (21) se obtiene el modelo dinámico del manipulador móvil:

$$\bar{M}\,{}^w_m R^T \ddot{\eta}_w + \left(\bar{M}\,{}^w_m \dot{R}^T + H\,{}^w_m R^T\right)\dot{\eta}_w = \bar{B}\bar{\tau} \quad (22)$$

5. Simulación.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas del modelo dinámico del móvil omnidireccional, para diferentes condiciones iniciales, y para diferentes pares aplicados en las ruedas. Cabe mencionar que se considera que el móvil parte del reposo, es decir, la velocidad de las ruedas, y por consecuencia del móvil, es cero.

Tomamos en cuenta el análisis de fuerza realizado en la sección 3, para encontrar el valor del par necesario en las ruedas para que el móvil omnidireccional realice algún movimiento básico, a partir de la ecuación (10). Si despejamos la fuerza necesaria en cada una de las ruedas se tiene:

$$\bar{F}_r = \bar{A}^{-1} F_m \quad (23)$$

Proyectando sobre el marco inercial W:

$$\bar{F}_r = \bar{A}^{-1}\,{}^w_m R^{-1} F_w \quad (24)$$

Resolviendo (26) se obtiene:

$$F_{r_1} = F_{w_y}\left(\frac{\cos(\phi)}{3} + \frac{\sqrt{3}\sin(\phi)}{3}\right) + \tau_w \frac{1}{(3L)} - F_{w_x}\left(\frac{\sin(\phi)}{3} - \frac{\sqrt{3}\cos(\phi)}{3}\right) \quad (25)$$

$$F_{r_2} = \tau_w \frac{1}{(3L)} - 2F_{w_y}\frac{\cos(\phi)}{3} + 2F_{w_x}\frac{\sin(\phi)}{3} \quad (26)$$

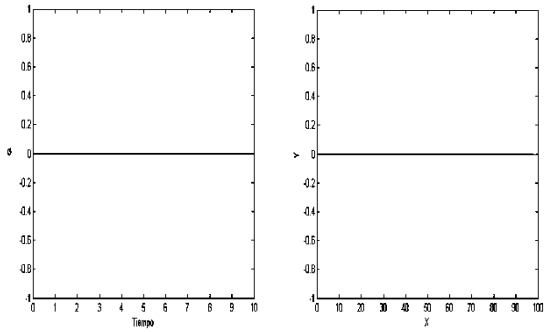
$$F_{r_3} = F_{w_y}\left(\frac{\cos(\phi)}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin(\phi)}{3}\right) + \tau_w \frac{1}{(3L)} - F_{w_x}\left(\frac{\sin(\phi)}{3} + \frac{\sqrt{3}\cos(\phi)}{3}\right) \quad (27)$$

A continuación se presentan casos de movimientos básicos a realizar por el móvil, para probar el modelo dinámico obtenido.

CASO 1

Para el primer caso se quiere conseguir un movimiento hacia el frente del robot móvil, es decir, movimiento solo sobre el eje X_m, lo cual generaría una fuerza solo en ese eje por consecuencia, así se asume que $F_{w_x} = 1,\ F_{w_y} = 0,\ \tau_w = 0$. Considerando las condiciones iniciales son $\eta_m = [\,0{,}0{,}0\,]^T$ sustituyendo estas restricciones en (25), (26) y (27), se obtiene el par necesario a aplicar en cada una de las ruedas como $F_{r_1} = -F_{w_x}(-\frac{\sqrt{3}}{3}),\quad F_{r_2} = 0,\quad F_{r_3} = -F_{w_x}(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Tomando en cuenta esta relación el vector de pares que se introducen al sistema es $\bar{\tau} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ y se obtienen los resultados mostrados en la Figura 7.



A) B)

Fig. 7 A.- Posición X-Y. B.- Orientación

Se puede observar que el movimiento resultante del robot móvil es solo sobre el eje X del sistema, la posición tanto en Y como en ∅ se conservan en su

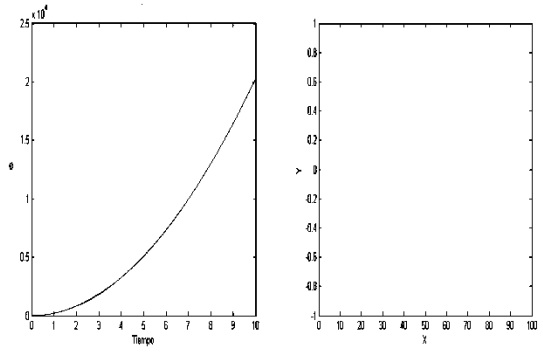
condición inicial, lo cual confirma el comportamiento esperado después del análisis de fuerza.

CASO 2

Haciendo el análisis de fuerza como en el caso 1, se obtienen las relaciones necesarias de torque en las llantas para lograr cierto movimiento, por ejemplo, la rotación sobre Z_w , en el cual, se generaría solo un par sobre τ_m, sin fuerza sobre el eje X y Y del móvil. Por lo tanto se asume que $F_{w_x} = 0$, $F_{w_y} = 0$, $\tau_w = 1$. Sustituyendo estas restricciones en (26), (27) y (28) y considerando las mismas condiciones iniciales que en el caso 1, se obtiene el par necesario a aplicar en cada una de las ruedas como $F_{r_1} = \tau_m \frac{1}{(3L)}$, $F_{r_2} = \tau_m \frac{1}{(3L)}, F_{r_3} = \tau_m \frac{1}{(3L)}$.

Tomando en cuenta esta relación el vector de pares que se introducen al sistema es $\bar{\tau} = [\frac{1}{(3L)}, \frac{1}{(3L)}, \frac{1}{(3L)}]$ y se obtienen los resultados mostrados en la Figura 8.

Se puede observar que la posición inicial tanto en el eje X como en el eje Y no cambia mientras avanza la simulación, y el ángulo de orientación $\emptyset$ sigue incrementándose dado que el movimiento esperado es una rotación continua sobre el eje Z_m del sistema.

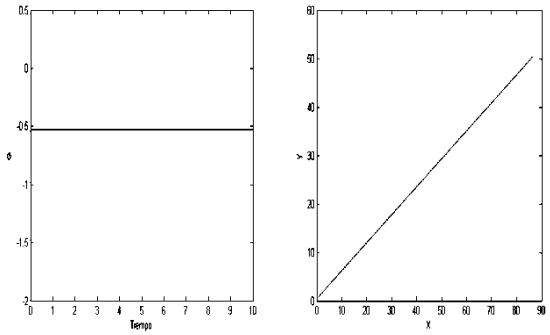


A) B)

Fig. 8 A.- Posición X-Y. B.- Orientación

CASO 3

En este caso se modificaron las condiciones iniciales del sistema de acuerdo a $\eta_m = [\,1,1,\frac{\pi}{6}\,]^T$ y se volvieron a introducir los mismos torques que en el caso 1, obteniendo los resultados que se muestran en la Figura 9.



A) B)

Fig. 9 A.- Posición X-Y. B.- Orientación

Si se grafica la evolución de la posición en X y Y del robot móvil se observa lo obtenido en la Fig. 10, en la cual se ve que el ángulo de orientación ϕ se mantiene, mientras que la posición en X y Y va aumentando conforme pasa el tiempo.

6. Conclusiones.

En este trabajo se presentó el análisis cinemático, de fuerzas y dinámico de un móvil omnidireccional, obteniendo dicho modelo a través de la formulación de Euler-Lagrange para después analizar su comportamiento mediante simulación. Se observó que el modelo obtenido refleja el comportamiento del robot móvil en la realidad. Se mostró también la forma para encontrar los valores necesarios en cada una de las ruedas para realizar algún movimiento en específico en este tipo de robots móviles, mediante el análisis de fuerzas del sistema. Mediante simulación se comprobó que dicho análisis es válido para este sistema y que se obtienen los movimientos esperados, en los 3 casos, incluso cambiando las condiciones iniciales como se hizo en el último de ellos. Esta metodología de análisis sirve para encontrar una relación de par en la ruedas, sin embargo, lo que se quiere controlar es la velocidad en las ruedas y así poder controlar la velocidad del móvil por consecuencia, trabajo a futuro involucra implementar alguna ley de control, para regulación o seguimiento, directamente en la velocidad de las ruedas y así probar el comportamiento del sistema, para implementarlo de manera real en un prototipo robótico en CIDETEC.

Referencias

[1] Ollero A. *"Robótica, Manipuladores y robots móviles"*, Alfa Omega, España, Primera, 2007.

[2] Craig J.. *"Robótica"*, Prentice Hall, U.S.A., Tercera, 2006.

[3] Bugarin E., Gutierrez A., Aguilar-Bustos A.Y. *"Modelado cinemático de un robot móvil onmidireccional no estandar"*, XV Latinamerican Control Conference Lima Perú. 2012.

[4] Yohei K., Yasuhisa H., Kazuhiro K. *"Coordinated Motion Control of Multiple Mobile Manipulators Handling a Single Object without Using Force/Torque Sensors"*, Conference on Intelligent Robots and Systems. 2002.

[5] Brad H, Seth K, Jane S, Reid S, Sanjiv S. *"An Autonomous Mobile Manipulator for Assembly Tasks"*, Springer Science and Bussiness Media. 2009.

[6] Villarreal M., Cruz C., Saldivar S., García L. *"Dynamic Coupling Between an Parallel Manipulator and an Omnidirectional Mobile Platform"*, XV Latinamerican Control Conference Lima Perú. 2012.

[7] Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M., *"Robotics Modelling and Control"*, Wiley, U.S.A., Segunda, 2006.