Modelación de un Robot Móvil de Dos Ruedas con Tracción Diferencial

Collazo Cuevas José Iván[1], Gorrostieta Hurtado Efrén[2], Jesús Carlos Pedraza Ortega[2], Ubaldo Geovanni Villaseñor Carrillo[1], Rubén Alejandro Romero Torrez[1] y Marco Antonio González Aguirre[1]

Universidad del Valle de México[1] (UVM) Campus Querétaro Boulevard Villas del Mesón No. 1000 Col. Juriquilla, Querétaro, México. Centro de Investigación y Desarrollo en Informática y Telecomunicaciones (CIDIT) Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), Av. De las Ciencias sin número, Querétaro México[2]

Resumen

El trabajo describe el diseño cinemático, dinámico, electrómecánico de un robot móvil de dos ruedas con tracción diferencial, con el propósito de integrar diseño mecánico, control, y sistemas eléctricos.

<u>Palabras clave:</u> cinemático, dinámico, electrómecánico, móvil, diseño mecánico, tracción diferencial.

1. Introducción

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la Robótica. Se trata también de incrementar la autonomía misma del robot limitando todo lo posible la intervención humana.

Desde el punto de vista de la autonomía consiste en que el robot contenga un grado suficiente de inteligencia que le permita ser reactivo a un sonido, identificar el origen de la fuente y tomar decisiones basándose en la información proporcionada del medio, de las diferencias principales de un robot móvil autónomo y un robot móvil sin autonomía es que el primero no tiene una trayectoria prevista, al mismo tiempo en que el entorno en el que se tiene que guiar no es conocido, el único conocimiento que tiene el robot de su medio es mediante sensores, con el fin de conseguir los objetivos programados.

En el desarrollo de un sistema robótico se tiene que tener en cuenta que este se compone por varios elementos adicionales que se pueden dividir en:

- Mecánica
- Electrónica
- Parte de control (actuadores y sensores)

En el presente trabajo nos ocuparemos en la parte de software y electrónica.

Los robots generalmente se deben describir por un modelo cinemático [1] y por un modelo dinámico, [2].

2. Metodología

En el presente trabajo se plantearan de manera general el proceso de diseño de un robot móvil de dos ruedas donde se diseñara las siguientes partes:

- Diseño Mecánico
- Diseño Cinemático
- Diseño Dinámico
- Diseño Electromecánico

2. Diseño

En el presente trabajo nos ocuparemos en la parte de Mecánica, específicamente en la modelación del comportamiento físico del robot (mediante un modelo cinemático y dinámico), así como la relación que existe entre su movimiento, con el voltaje y corriente consumido por cada motor que suministrara el movimiento al robot

2.1 Diseño Mecánico

En un la primera etapa se empleara el diseño de un robot mecánico de dos ruedas con tracción diferencial, empleando motores de cd con una reducción por engranes, que otorgan un torque a 6000 RPM de 1.8 kg-cm a una tensión de 6 volts los cuales son mostrados en la Figura 1.

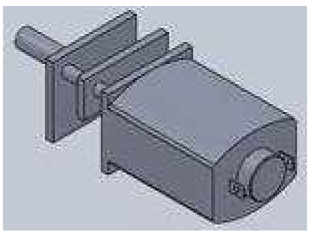

Figura 1: Motor de cd con reducción por caja de engranes

La estructura del robot será una plataforma de base circular con un radio de 6cm, la disposición de los motores con la rueda es como se muestra la Figura 2

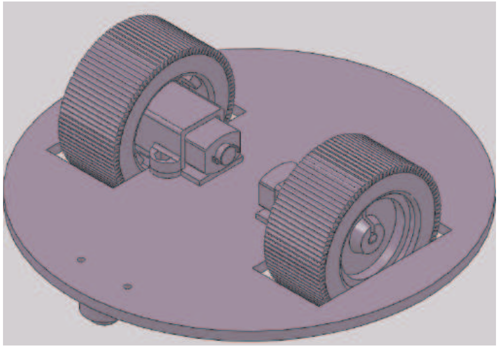

Figura 2: Diseño del Robot

Las ruedas cuentan con "encoders" para detectar tanto la dirección de giro, y posición, para posteriormente controlar su velocidad ángular lo que nos permitirá conocer el movimiento del robot, su posición (x,y) , así como su ángulo de giro respecto a su "centroide".

Para determinar el comportamiento del robot primero tenemos que tener un modelo más completo del mismo, por lo que en la Figura 2 se muestran las variables dinámicas involucradas con el movimiento del robot $\dot{\theta}_1$=velocidad angular de la rueda 1, $\dot{\theta}_2$=velocidad angular de la rueda 2, V=velocidad del cuerpo del robot, $\dot{\varphi}$=velocidad angular del cuerpo del robot b=radio del robot, r=radio de las ruedas, b=radio del robot, r=radio de las ruedas, como se muestra en la Figura 3

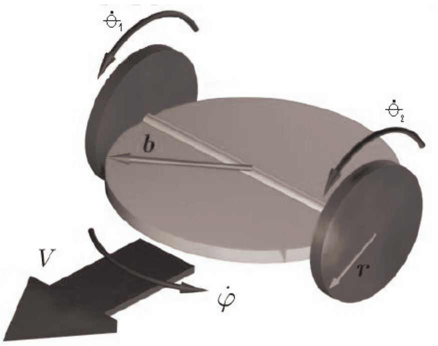

Figura 3: variables involucradas en el movimiento del robot

Otras variables involucradas con los parámetros físicos del robot: la masa del robot M, la masa de cada rueda m, las variables de posición absoluta del centroide de masa del robot (x,y), φ=el ángulo entre la dirección de movimiento del robot y el eje x, Como se muestra en la Figura 4.

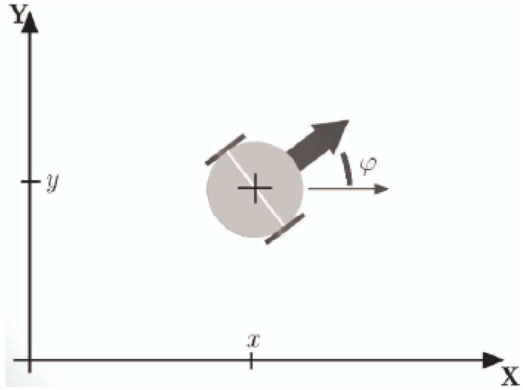

Figura 4: variables de la posición absoluta del robot

Una vez descritas las variables generales del modelo matemático se procede a obtener las ecuaciones cinemáticas[1][6] que relacionan la velocidad de giro de cada una de las ruedas con las variables de posición y giro del robot, dinámicas[2], y para el control de los motores a emplear las ecuaciones electromecánicas[3]

3. Ecuaciones cinemáticas

Las ecuaciones cinemáticas son aquellas que relacionan la velocidad de giro de cada una de las ruedas con las variables de la posición del

robot: (*x*, *y*, ϕ)[3].

Al considerar el robot como un cuerpo rígido, la velocidad lineal del centro de masa se obtiene en base al promedio de las velocidades lineales de sus extremos, que es donde se encuentran las ruedas. A su vez, la velocidad lineal de cada una de sus ruedas se obtiene como el producto de la velocidad angular (velocidad de giro) y el radio de ellas. Así, la velocidad del centro de masa queda definida por la ecuación 1:

$$v = \frac{r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} \quad (1)$$

El ángulo de giro del robot se determina en base a las relaciones geométricas entre el movimiento de cada lado del robot, tal como se muestra en la Figura 5.

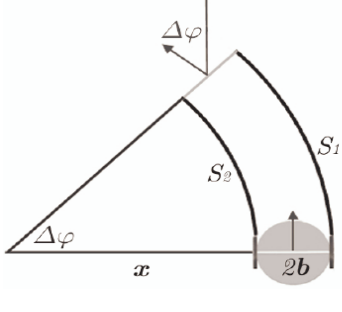

Figura 5: Relaciones entre el ángulo de giro y el giro de cada rueda

Por lo cual el robot al moverse en contra de las manecillas del reloj, aumenta su ángulo φ.

Como se aprecia en la Figura 4 la rueda izquierda sostiene un arco de radio *x*, por lo que la distancia recorrida por esa rueda está dada por el radio de giro de la rueda izquierda para describir una trayectoria S2, como se muestra en la Ecuación 2, mientras que la rueda derecha tiene un radio de x+2b, (siendo 2b el diámetro del robot), como se muestra en la Ecuación 3, para seguir la trayectoria S1, por lo que su velocidad angular es mayor a la rueda 1.

$$S2 = r\Delta\theta_2 = x\Delta\varphi \tag{2}$$
$$S1 = r\Delta\theta_1 = (x+2b)\Delta\varphi \tag{3}$$

Calculando el valor de la diferencia *S1-S2*, y dividiendo por el tiempo transcurrido Δ*t*, se obtiene la relación entre la velocidad de giro del robot, y la velocidad de cada una de sus ruedas, como se indica en la ecuación 4.

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}{2b} \tag{4}$$

Al descomponer la velocidad lineal del robot en las velocidades asociadas a cada eje del plano como sus proyecciones sobre los ejes x, y con lo que se obtienen las ecuaciones 5 y 6.

$$\dot{x} = \cos(\varphi) \tag{5}$$
$$\dot{y} = \operatorname{sen}(\varphi) \tag{6}$$

Al integrar las ecuaciones 4, 5 y 6 obtenemos la posición absoluta del robot, la cual estaría dada por las ecuaciones 7, 8 y 9.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} \cos(\varphi(t))dt \tag{9}$$
$$y(t) = y(0) + \int_0^t \frac{r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} \sin(\varphi(t))dt \tag{8}$$
$$\varphi(t) = \varphi(t) + \int_0^t \frac{r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}{2b} dt \tag{9}$$

Con lo cual conociendo la posición inicial del robot, las velocidades angulares así como el tiempo transcurrido es posible determinar la posición relativa a la posición inicial[5],

4. Ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones dinámicas[4] relacionan las variables dinámicas del robot para determinar la aceleración de cada rueda en base al momento de torsión aplicado por cada motor. Al Considerar el cuerpo del robot y sus ruedas como discos rígidos de masas M y m respectivamente, las ecuaciones dinámicas se determinan en base a un cálculo Langrangeano, el sistema se simplifica gracias a que la altura del robot es la misma en todo momento, la energía potencial del mismo permanece constante reduciéndose a la suma de la energía cinética del cuerpo(K_C) de cada rueda (K_{r1} y K_{r2}) queda expresado en la Ecuación 10.

$$\mathcal{L} = K_c + K_{r1} + K_{r2} \tag{10}$$

Dado que la energía cinética del cuerpo del robot está dada por la suma de la energía cinética debido a la translación del cuerpo (asociado a la velocidad lineal) y la energía cinética de la rotación (asociada a la velocidad angular) como se muestra en la ecuación 11.

$$K_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 \tag{11}$$

Donde el parámetro IC representa el momento de inercia del cuerpo del robot con respecto a su centro de giro, dado por la ecuación 12.

$$I_c = \frac{1}{2}Mb^2 \tag{13}$$

Para obtener la energía cinética de cada rueda se usa la ecuación 13.

$$K_c = \frac{1}{2}Mv_i^2 + \frac{1}{2}I_r\dot{\theta}_i^2 \tag{14}$$

Donde el subíndice i representa el número de rueda que se está analizando e I_r es el momento de inercia de la rueda como se muestra en la ecuación 15.

$$I_r = \frac{1}{2}mr^2 \tag{15}$$

Utilizando las ecuaciones 10 a la 13 en conjunto con las ecuaciones cinemáticas derivadas en la sección anterior, la ecuación del Lagrangeano queda definida por la ecuación 16.

$$\mathcal{L} = \left[\frac{3r^2}{8}(M+4m)\right]\left(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2\right) + \left[\frac{Mr^2}{8}\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \tag{16}$$

Empleando la ecuación 17 en el sistema Lagrangeano se obtienen sus ecuaciones

dinámicas donde τ es un vector con los torques

de cada rueda al calcular las derivadas del sistema se obtienen las ecuaciones dinámicas17

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3r^2}{8}(M+4m) & \frac{Mr^2}{8}\\ \frac{Mr^2}{8} & \frac{3r^2}{8}(M+4m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} \tag{17}$$

Con el fin de agregar más exactitud al modelo incluimos el roce dinámico en cada rueda obteniendo la ecuación 18:

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2r^2}{s}(M+4m) & \frac{Mr^2}{s}\\ \frac{Mr^2}{s} & \frac{2r^2}{s}(M+4m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_tG\,i_1\\ K_tG\,i_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p\ddot{\theta}_1\\ p\ddot{\theta}_2\end{bmatrix} \quad (18)$$

Integrando en el tiempo esta ecuación se pueden obtener las velocidades de cada rueda, necesarias para resolver las ecuaciones cinemáticas.

5. Ecuaciones electromecánicas

Ahora para a completar el modelo del robot se introducirá información de los motores a emplear, generando así una relación entre la corriente consumida y el torque entregado por los motores así como la relación de voltaje y velocidad como se muestra en la Figura 6

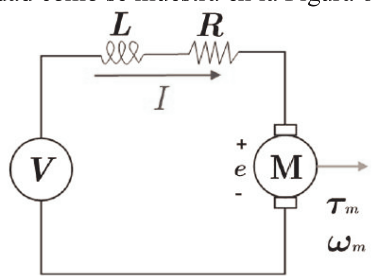

Figura 6: Sistema Electromecánico

Con lo recorrer la malla completa del circuito obtenemos la ecuaciones 19 donde R es la impedancia interna del motor, L su inductancia

$$V=L\frac{di}{dt}+Ri+e \quad (19)$$

La cual establece que el torque aplicado al motor de DC es proporcional a la corriente que circula por el circuito y que el voltaje inducido, *e* es proporcional a la velocidad angular del eje El parámetro Ke se denomina constante del motor, mientras Kt es la constante de armadura obteniendo las ecuaciones 20 y 21.

$$e=K_e\omega_m \quad (20)$$
$$\tau_m=K_t i \quad (21)$$

Al acoplar los motores a las ruedas a través de una reducción por tren de engranes, la velocidad angular de las ruedas se ve reducida G veces con respecto a la velocidad del eje del motor, mientras que el torque aplicado a las ruedas se incrementa G veces, donde G es la relación de engranes, con el fin de aumentar el torque en los motores pero disminuyendo las revoluciones de los mismos, obteniendo las ecuaciones 22 y 23.

$$\dot{\theta}=\frac{\omega_m}{G} \quad (22)$$
$$\tau=G\tau_m \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones 20 a 23 en la ecuación 19, se obtienen las ecuaciones electromecánicas 24 y 25 del robot, que relacionan el voltaje aplicado a cada motor con el torque que recibe la rueda respectiva.

$$V=L\frac{di}{dt}+Ri+k_eG\dot{\theta} \quad (24)$$
$$\tau=k_t+Gi \quad (25)$$

6. Resultados

En base a las ecuaciones cinemáticas, dinámicas y electromecánicas obtenidas en las secciones anteriores se tiene un modelo matemático que describe el comportamiento del robot en base a su voltaje y corriente aplicados a cada motor, teniendo como ecuaciones finales que describe el sistema

$$L\frac{dI_i}{dt}=V_i(t)+RI_i+k_eG\dot{\theta}_i \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2r^2}{s}(M+4m) & \frac{Mr^2}{s}\\ \frac{Mr^2}{s} & \frac{2r^2}{s}(M+4m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_tG\,i_1\\ K_tG\,i_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p\ddot{\theta}_1\\ p\ddot{\theta}_2\end{bmatrix} \quad (27)$$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t\frac{r(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)}{2}\cos(\varphi(t))dt \quad (28)$$
$$y(t)=y(0)+\int_0^t\frac{r(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)}{2}\sin(\varphi(t))dt \quad (29)$$
$$\varphi(t)=\varphi(t)+\int_0^t\frac{r(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)}{2b}dt \quad (30)$$
$$\dot{\theta}_i(t)=\dot{\theta}_i(0)+\int_0^t\ddot{\theta}_i\,dt \quad (31)$$

Donde la posición y velocidad del robot será obtenida mediante enconders en cada rueda, durante el funcionamiento del robot, así como el ángulo de giro se obtendrá mediante el uso de un acelerómetro.

REFERENCIAS

[1] Aníbal Ollero Baturone "Robótica manipuladores y robots móviles"
[2] Wise, E (1999) *Applied Robotics, Delman learning*
[3] Angeles, J. (1997) *Fundamentals of Robotics Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithm.* Springer.
[4]Craig, J.(1989) *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* 2ed Addison- Wesley Pub. Co
[5] Touati Youcef, Amirat Yacine, Djamaa Zaheer & Ali-Chérif Arab *Robust Position Estimation of an Autonomous Mobile Robot*
[6] Jhonny A. Valencia V., Alejandro Montoya o. Luis Hernando Rios. *Modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial y navegación A partir de la estimación odométrica.*