

Propuesta de Reconstrucción 3D utilizando Transformada Wavelet

Quintanar-Pérez M.E.¹, Moya-Morales J.C.², Pedraza-Ortega J.C.², Sotomayor-Olmedo A.²,
Gorrostieta-Hurtado E², Aceves-Fernández M.A.² y Ramos-Arreguín J.M.²

¹ PICYT CIDESI, Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial
² CIDIT-Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Querétaro

Resumen

El artículo presenta una propuesta de reconstrucción tridimensional, usando la Transformada Wavelet, en particular la Transformada Wavelet Morlet Compleja. El método propuesto utiliza una imagen que contiene un patrón de franjas senoidales proyectadas sobre el objeto, este patrón se distorsiona debido a la forma del objeto. Del patrón de franjas proyectado, se puede calcular una frecuencia espacial, la cual se utilizará en parte del proceso para eliminar discontinuidades en franjas con altas frecuencias, aprovechando las ventajas conocidas de la transformada wavelet. La aportación principal del presente trabajo es la presentación de un algoritmo que automáticamente determina el número de franjas en las imágenes. Simulaciones por computadora fueron realizadas para validar el método y se muestran los resultados de los experimentos desarrollados.

Palabras clave: Transformada wavelet Morlet. Frecuencia espacial. Desdoblamiento de fase. Transformada discreta Wavelet. Transformada wavelet Maar.

1. Introducción y Objetivo

Dentro de la variedad de métodos para hacer procesamiento digital de imágenes, específicamente en aquellos de proyección de franjas, se han desarrollado técnicas para la reconstrucción de imágenes tridimensionales. De las técnicas de proyección de franjas que se han desarrollado están: cambio de fase y Perfilometría de Fourier (FTP), este último modificado

y mejorado, Pedraza [3]. Aunado a esto existen propuestas acerca del uso de la Transformada Wavelet, por la ventaja que da que esta se adapta a las frecuencias, Xiang [9] y Qiang Zhang [10] enfocan su trabajo sobre las Wavelets Maar y Morlet, obteniendo la altura de los objetos. El presente trabajo propone el desarrollo de una metodología alterna basada en la Transformada Wavelet, para reconstruir imágenes en 3D.

2. Transformada Wavelet

Una wavelet se conoce a una forma de onda de duración limitada que tiene un valor medio cero, además de que tiene ciertas similitudes con la Transformada de Fourier. Por ejemplo, en el caso de Fourier se considera la descomposición de una señal arbitraria f en ondas sinusoidales de diferentes frecuencias, mientras que wavelet realiza la descomposición de esa misma señal en versiones escaladas y trasladadas de la wavelet original, conocida como wavelet madre. De forma general, la transformada wavelet de una señal f es un conjunto de coeficientes $W(a, b)$, cuyos índices se asocian con la escala y la posición de la señal. Considerando el caso unidimensional, los coeficientes se obtienen como:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad \text{y} \quad b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales.

Esta transformación se considera como la suma sobre todo el intervalo de la señal multiplicada por las versiones trasladadas y escaladas de la función

ψ . Cuando se multiplica cada coeficiente por la wavelet apropiadamente escalada y trasladada, podemos obtener la señal original. Sin embargo, para llevar a cabo los cálculos de todos los coeficientes para todas las escalas y posiciones posibles, es casi imposible, y como sucede en el caso de Fourier, se utiliza la versión discreta de la transformada, llamada transformada discreta wavelet (DWT). En esta transformada, se elige un subconjunto de escalas y posiciones, el cual es más eficiente cuando se implementa en algoritmos computacionales como potencias de 2.

$$C(a, b) = C(j, k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) g_{j,k}(x) \quad (2)$$

con $a = 2^j, b = k2^j, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

donde \mathbb{Z} es el conjunto de números enteros y \mathbb{N} es el conjunto de números naturales.

La elección de una wavelet apropiada para una aplicación particular es uno de los pasos más importantes en la práctica. En nuestro caso, presentamos un análisis considerando la wavelet Maar debido a que presenta una mejor localización en los dominios de espacio y frecuencia.

3. Metodología

Como se había mencionado, la wavelet Maar se utilizará para este análisis. Si se considera la wavelet Maar continua unidimensional, asociada con $z(x)$:

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \quad (3)$$

donde $a > 0$ y b son reales, y ψ^* significa complejo conjugado.

La transformada wavelet de $z(x)$ se convierte en:

$$W(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} Z(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{j\omega b} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [Z_1(\omega) + Z_2(\omega)] \Psi^*(a\omega) e^{j\omega b} d\omega \quad (4)$$

considerando una variación lenta de $a(x)$ y $b(x)$, e igualando con la transformada de la señal analítica, se obtiene:

$$W(a, b) \approx \Psi^* \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\} b(b) e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]} \quad (5)$$

Usando la wavelet Maar, se obtiene:

$$W(a, b) \approx \Psi_M^* \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\} b(b) e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]}$$

$$= \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\}^2 e^{-a[\omega_0 + \varphi'(b)]^2 / 2} b(b) e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]} \quad (6)$$

Cuando $\Psi_M(\omega)$ alcanza un máximo en $\omega = \pm 21/2$ y llevando a cabo una simplificación matemática, se tiene lo siguiente:

$$\varphi(b) = \text{angle} \{W[a_r(b), b]\} - \omega_0 b \quad (7)$$

Detectando el valor de amplitud mayor en cada posición b relativo a x , la fase modulante $\varphi(b)$ de $g(x)$ se puede recuperar, obteniendo de esta forma la información deseada. De la ecuación 7 se puede observar la frecuencia ω_0 , esta frecuencia está relacionada directamente con la frecuencia f_b , utilizada en el método de perfilometría de Fourier.

La metodología que se propone para la reconstrucción de objetos en 3D usando la Transformada Wavelet Maar, abarca desde la adquisición de imágenes con un patrón de franjas senoidales proyectadas sobre un objeto, incluyendo el cálculo de la frecuencia espacial f_b , que para ello es necesario contar con el número de franjas proyectadas, hasta el desdoblamiento de fase y finalmente la reconstrucción del objeto tridimensional. El siguiente diagrama muestra cada una de las etapas de la metodología.

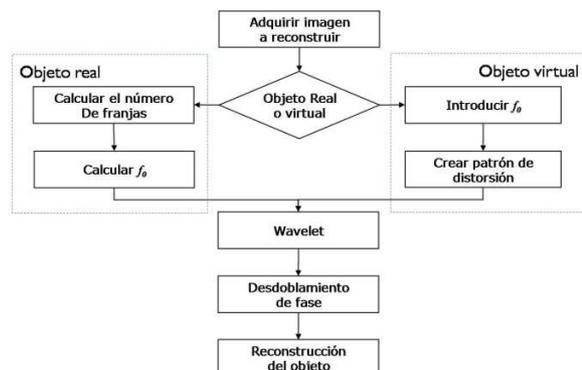


Figura 1. Diagrama de bloque de la metodología.

La metodología tiene las siguientes fases: Obtener la imagen que contiene al objeto a digitalizar. Si la imagen es creada de manera virtual, entonces es necesario introducir la frecuencia espacial f_0 para generar el patrón de franjas, a diferencia de que si es un objeto real, es necesario calcular el número de franjas que se le proyectaron para después encontrar la frecuencia espacial f_0 . Después aplicar método de la Transformada Wavelet, enseguida desdobra la fase y hacer la reconstrucción del objeto.

Una etapa importante dentro de la metodología es el cálculo de la frecuencia espacial f_0 . Para este fin se usa la ecuación propuesta:

$$f_0 = \frac{2^{N_1} - 2^{N_0}}{2^{N_f - 1} [2^{N_1} - 2^{N_0} - (Nfr - t_1)(1 - 2^{-1})]}$$

La implementación de la subrutina se da bajo el siguiente diagrama de flujo para que una vez que se determine el número de franjas proyectadas sobre un objeto se pueda obtener la frecuencia espacial y comenzar a usar la Transformada Wavelet para su reconstrucción.

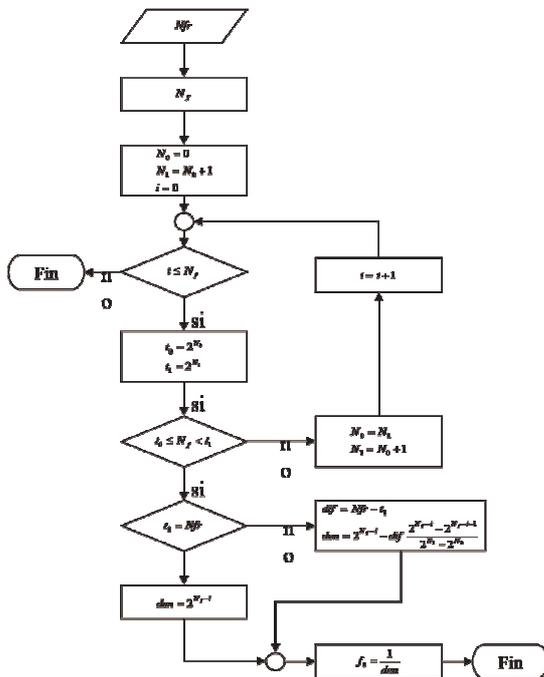


Figura 2. Diagrama de flujo para la determinación de la frecuencia espacial.

4. Resultados

Para probar la metodología, se crean objetos virtuales creados por computadora, como se observa en la figura 2. Posteriormente se genera un patrón de franjas sinusoidales con una frecuencia espacial que se agregan al objeto descrito. Es importante notar que como se había mencionado anteriormente, la transformada wavelet se puede implementar más fácilmente si se tienen múltiplos de 2, por esta razón se generaron imágenes de 512 x 512 pixeles. El resultado es que las franjas son distorsionadas por el objeto virtual y de esta forma tenemos nuestro objeto a digitalizar, como se observa en la figura 3. Nótese que en la vista de la figura 3, se tiene un patrón distorsionado ideal, es decir, sin sombras ni objetos con huecos.

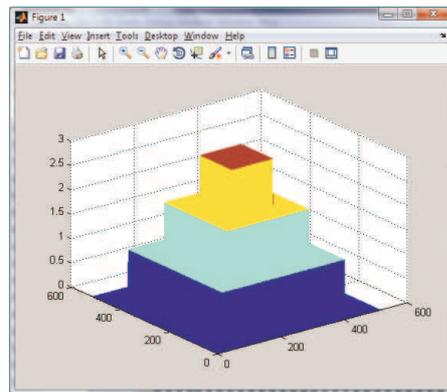


Figura 3. Objeto virtual creado por computadora

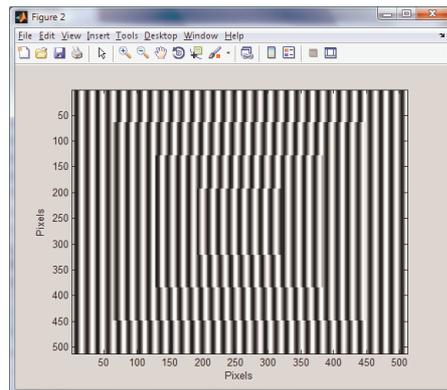


Figura 4. Patrón de franjas proyectado sobre el objeto virtual.

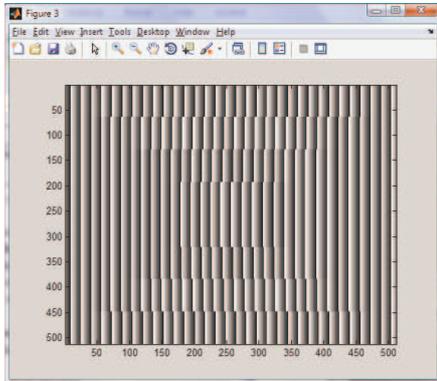


Figura 5. Imagen del mapa de fase del objeto

Al aplicar la transformada wavelet se obtiene el mapa de fase mostrado en la figura 5. Claramente se observa que no existen cambios abruptos de la fase intermedios en la imagen que se normalmente se pudieran observar como ruido de alta frecuencia. Y en el mapa del objeto se muestra que los cambios de fase están bien definidos.

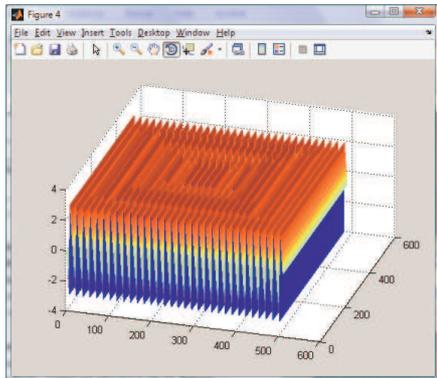


Figura 6. Malla del mapa de fase del objeto.

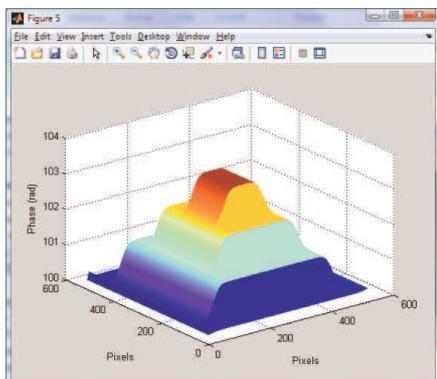


Figura 5. Fase envuelta del objeto.

Finalmente en la figura 4 se observa el objeto reconstruido después de aplicarle la metodología completa, con un error máximo de 4% con respecto de la original.

Agradecimientos

A través de este medio queremos expresar nuestro agradecimiento a PROMEP por el apoyo económico otorgado, mediante el proyecto PROMEP/103.5/08/3320, y al CONACYT por el apoyo otorgado por la beca de estudios de posgrado con numero 204260.

Referencias

- [1] Mitsuo Takeda, Hideki Ina and Seiji Kobayashi, Fourier-Transform method of fringe pattern analysis for computed-based topography and interferometry. *J.Opt. Soc.Am.* Vol. 72, No.1: 156-160, 1982.
- [2] Wu Lu, "Research and development of fringe projection-based methods in 3D shape reconstruction". *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, pp. 1026-1036, 2006
- [3] Pedraza, J.C., Wilfrido Rodriguez, Leonardo Barriga, et al, "Image Processing for 3D Reconstruction using a Modified Fourier Transform Profilometry Method", *MICAI 2007, LNAI 4827*, pp. 705-712, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] Fiona Berryman Paul Pynsent and James Cubillo, A theoretical Comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise. *Optics and Lasers in Engineering*. Vol. 39: 35-50, 2003.
- [5] Pramod K. Rastogi, *Digital Speckle Pattern Interferometry and related Techniques*. Edit. Wiley, 2001.
- [6] Fiona Berryman Paul Pynsent and James Cubillo, "A theoretical Comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise". *Optics and Lasers in Engineering*. Vol. 39, pp. 35-50, 2003
- [7] Pramod K. Rastogi, "Digital Speckle Pattern Interferometry and related Techniques". Edit. Wiley, 2001
- [8] Itoh, K., "Analysis of the phase unwrapping algorithm". *Applied Optics*, 21(14): 2470-2486, 1982.
- [9] Xiang Zhou, Hong Zhao, "Three-Dimensional Shape Measurement Using Maar Wavelet Transform", *Proceedings of ICIRA 2008, Part I LNAI 5314*, pp. 753-760, 2008.

8° Congreso Nacional de Mecatrónica
Noviembre 26 y 27, 2009. Veracruz, Veracruz.

[10] Qiang Zhang, Wenjing Chen, Yan Tang, “Method of choosing the adaptive level of discrete wavelet decomposition to eliminate zero component”, Optics Communication, pp. 778-785, 2008.