

# Nueva Estructura de Control Basado en la Función *Coth–Csch* para Robots Manipuladores

G. Morales-Timal, P. Sánchez-Sánchez, F. Reyes-Cortés, A. Michua-Camarillo,  
J. Cid-Monjaraz, J. G. Cebada-Reyes y G. Romero-Rodríguez  
Universidad Autónoma de Puebla, F. C. E. Grupo de Robótica "oocelo"  
lepable@ece.buap.mx y freyes@ece.buap.mx

**Abstract** - El objetivo de este artículo es controlar la posición de un robot manipulador mediante la implementación de un nuevo esquema de control basado en una función trigonométrica hiperbólica. Para plantear la estructura de control se utiliza el método de *moldeo de energía*; y mediante la *teoría de Lyapunov* se demuestra formalmente la estabilidad del esquema de control. Es importante comparar la funcionalidad del controlador propuesto, por tal motivo se compara con el controlador PD simple, este análisis se realiza en función del *índice de desempeño* resolviendo la norma  $L_2$ .

## I. INTRODUCCIÓN

Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para manipular materiales, herramientas o dispositivos especializados, a través de movimientos variables programados para la obtención del buen desempeño en una gran variedad de tareas [1]. Desde un punto de vista industrial, un robot es una herramienta clave debido a que es capaz de realizar tareas repetitivas y monótonas de forma rápida, barata y precisa, tareas en las cuales el rendimiento de una persona podría disminuir con el tiempo [2,3,4,5].

Para realizar el control de un robot necesitamos conocer parcialmente su modelo dinámico y en cierta medida experiencia para programarlo. El *modelo dinámico* es aquel que describe el comportamiento de un sistema a un estímulo específico, ya sea este un estímulo interno o externo; esta representación matemática se obtiene aplicando leyes físicas para interpretar la dinámica del robot [6]. En todo sistema de control, el objetivo es mantener la variable de control dentro de ciertos límites permitidos por el sistema, generando varias problemáticas entorno al control del robot, una de ellas es el *control de posición*, el cual consiste en llevar el efector final del robot desde una posición inicial  $q_0$  hacia una posición deseada  $q_d$ , es decir, encontrar un par aplicado  $\tau$  tal que el error de posición  $\tilde{q}$  tienda a cero cuando el tiempo  $t$  evoluciona hacia infinito.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe la dinámica de un robot y sus propiedades; la estructura de controlador propuesto y el análisis de estabilidad en términos de Lyapunov se

detalla en la sección 3. El sistema experimental y los resultados se describen en la sección 4 y finalmente las conclusiones son descritas en la sección 5.

## II. MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

Para realizar el control de un robot es necesario determinar su comportamiento dinámico; aplicando leyes físicas podemos establecer condiciones para describirlo [6,7,8]. Un método ampliamente utilizado para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador es el *método de Euler-Lagrange* [9], al resolver la ecuación de Lagrange para un sistema conservativo [6,10,11], ecuación que se define como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau - f(\tau, \dot{q}) \quad (1)$$

donde  $q, \dot{q} \in R^{n \times 1}$  son el vector de desplazamiento y velocidad articular, respectivamente;  $\tau \in R^{n \times 1}$  es un vector de fuerzas y pares aplicados;  $f(\tau, \dot{q}) \in R^{n \times 1}$  es el vector de fricción; y el Lagrangiano  $L(q, \dot{q})$  es la diferencia entre la energía cinética y la potencial [6,10,11],

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q), \quad (2)$$

obtenemos el *modelo dinámico del robot manipulador* cuya representación matemática es:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\tau, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (3)$$

donde  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^{n \times 1}$  son el vector de posición, velocidad y aceleración articular del robot, respectivamente,  $M(q) \in R^{n \times n}$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta,  $g(q) \in R^{n \times 1}$  es el par gravitacional,  $f(\tau, \dot{q}) \in R^{n \times 1}$  es el vector de fricción,  $\tau \in R^{n \times 1}$  es el

par aplicado y  $\tau_d \in R^{n \times 1}$  representa las perturbaciones externas [12,13,14,15].

En ausencia de la fricción y otras perturbaciones, el modelo dinámico para un robot rígido de  $n$  grados de libertad es el siguiente [16,17]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (4)$$

A continuación se mencionan las características más importantes del modelo dinámico de un robot manipulador, ecuación (4), las cuales se consideran para el diseño de controladores.

**Propiedad 1.** La matriz de inercias  $M(q)$  es una matriz definida positiva  $M(q) > 0$ , y es considerada una pseudo matriz de inercias. Esta pseudo matriz está acotada [18,19]:

$$\mu_1(q)I \leq M(q) \leq \mu_2(q)I \quad (5)$$

donde  $I$  es la matriz Identidad,  $\mu_1(q) \neq 0$  y  $\mu_2(q)$  es una constante escalar para una revolución de una articulación, generalmente es una función escalar de  $q$  para una articulación prismática [20].

**Propiedad 2.** Se considera que la matriz anti-simétrica  $\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} \equiv 0$ , ya que:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T. \quad (6)$$

La matriz  $C(q, \dot{q})$  es una matriz lineal con respecto a  $q$  y acotada con respecto a  $\dot{q}$  desde  $k_c \in R_+$  es decir:

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq k_c(q) \|\dot{q}\|. \quad (7)$$

donde  $k_c(q)$  es un escalar constante para una revolución de una articulación, generalmente es una función escalar de  $q$  para una articulación prismática [20].

**Propiedad 3.** El par gravitacional  $g(q) \in R^{n \times 1}$  se obtiene mediante el gradiente de la energía potencial  $U(q)$  del robot [19],

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \quad (8)$$

donde  $U(q)$  es la energía potencial expresada en el espacio operacional y se supone acotada desde abajo [19], es decir, se encuentra acotada de la siguiente forma:

$$\left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\| \leq k_g \quad (9)$$

donde  $k_g$  es un escalar constante.

### III. METODOLOGÍA DE DISEÑO DE CONTROLADORES

En esta sección se presenta la metodología utilizada para proponer estructuras de control y los resultados referentes al análisis de estabilidad de los controladores analizados.

#### III-A. Moldeo de Energía

Típicamente para proponer controladores en espacio articular se utiliza el *método de moldeo de energía* [3,9,11,12,13,16]. Para aplicar este método es necesario considerar el modelo dinámico con ausencia de fricción y otras perturbaciones [9,11,12,13,14,16,17] y el siguiente esquema de control:

$$\tau = \nabla U(k_p, \tilde{q}) - f_v(k_v, \dot{q}) + g(q) \quad (10)$$

donde  $U(k_p, \tilde{q})$  es la *energía potencial artificial* que depende de  $k_p$  y está definida por:

$$U(k_p, \tilde{q}) = \frac{f(\tilde{q})^T k_p f(\tilde{q})}{2} \quad (11)$$

el término  $f_v(k_v, \dot{q})$  es una *función derivativa* que depende de  $k_v$  (función de amortiguamiento). Además, se debe considerar una función de Lyapunov de la forma:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{2} + U(k_q, \tilde{q}). \quad (12)$$

El método de *moldeo de energía* consiste en encontrar una función  $U(k_q, \tilde{q})$  que cumpla con las condiciones de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 0 & \forall \dot{q}, \tilde{q} &= 0 \\ V(\dot{q}, \tilde{q}) &> 0 & \forall \dot{q}, \tilde{q} &\neq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

y al derivar la función de Lyapunov, ecuación (12),

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{\dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}{2} - \frac{\partial U(k_p, \tilde{q})^T}{\partial \tilde{q}} \dot{q}, \quad (14)$$

obtenemos un punto de equilibrio estable, cumpliendo con la condición:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) \leq 0, \quad (15)$$

comprobando estabilidad asintótica en forma global con el empleo del *teorema de LaSalle*:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) < 0. \quad (16)$$

### III-B Controlador PD

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad (17)$$

donde  $\tilde{q}$  es el error de posición, es decir señala la diferencia entre la posición deseada  $q_d$  y la posición real  $q$ ;  $K_p$  y  $K_v$  son las matrices de ganancia proporcional y derivativa, respectivamente;  $g(q)$  es el par gravitacional; y  $\tau$  es el vector de pares aplicados. La ecuación de lazo cerrado se obtiene combinando el modelo dinámico del robot, ecuación (4), con el esquema de control, ecuación (17), obteniendo la siguiente representación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix}. \quad (18)$$

En esta ecuación se observa la existencia de un punto de equilibrio único. Ahora bien, se propone la siguiente función de Lyapunov, en base a la ecuación (12):

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{2} + \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{2}. \quad (19)$$

El primer término de  $V(\dot{q}, \tilde{q})$  es una función definida positiva con respecto a  $\dot{q}$  debido a que  $M(q)$  es una matriz definida positiva.

El segundo término es una función definida positiva con respecto al error de posición  $\tilde{q}$  porque  $K_p$  es una matriz definida positiva.

Al derivar la función de Lyapunov, ecuación (19), tenemos:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{\dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}{2} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}}, \quad (20)$$

y después de un poco de algebra y utilizando la propiedad 2 podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0, \quad (21)$$

Como se observa la derivada de la función de Lyapunov es semidefinida negativa, demostrando que el punto de equilibrio es estable, obteniendo estabilidad asintótica en forma global con el empleo del *teorema de LaSalle*:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) < 0. \quad (22)$$

En la región:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in R^n : V(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} \quad (23)$$

donde  $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T = 0 \in R^{2n}$ .

### III-C. Controlador propuesto

$$\tau = K_p \psi_{\tilde{q}} - K_v \psi_{\dot{q}} + g(q) \quad (24)$$

donde  $\tilde{q}$  es el error de posición, es decir señala la diferencia entre la posición deseada  $q_d$  y la posición real  $q$ ;  $K_p$  y  $K_v$  son las matrices de ganancia proporcional y derivativa, respectivamente;  $g(q)$  es el par gravitacional;  $\tau$  es el vector de pares y fuerzas aplicadas.

Para el caso específico del controlador propuesto definimos los términos dependientes de  $\psi$  como:

$$\psi_{\tilde{q}} = \frac{\text{coth}^2(\tilde{q}) - \text{csch}^2(\tilde{q})}{\text{coth}(\tilde{q})} \quad (25)$$

$$\psi_{\dot{q}} = \tanh(\tilde{q})$$

La ecuación de lazo cerrado se obtiene combinando el modelo dinámico del robot, ecuación (4), y el esquema de control, ecuación (24), obteniendo la siguiente representación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p \psi_{\tilde{q}} - K_v \psi_{\dot{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix} \quad (26)$$

en esta ecuación se observa la existencia de un punto de equilibrio único. Ahora bien, se propone la siguiente función de Lyapunov, en base a la ecuación (12):

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Al derivar la función de Lyapunov, ecuación (27), tenemos:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \left[ \tanh \tilde{q} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}))} \right] \dot{\tilde{q}} \quad (28)$$

y después de un poco de algebra y utilizando la propiedad 2 podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = -\dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \tanh(\dot{q}_1) \\ \tanh(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Como se observa la derivada de la función de Lyapunov es semidefinida negativa, demostrando que el punto de equilibrio es *estable*, obteniendo estabilidad asintótica global con el empleo del *teorema de LaSalle*:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) < 0. \quad (30)$$

En la región:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in R^n : V(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} \quad (31)$$

donde  $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T = 0 \in R^{2n}$ .

#### IV. DESCRIPCIÓN DE SISTEMA EXPERIMENTAL

Para realizar la evaluación experimental del controlador propuesto se utilizó un robot antropomórfico de tres grados de libertad tipo brazo, cada articulación se forma mediante un motor de transmisión directa y cada eslabón está construido con aluminio aeroespacial 6061, el cual es un material rígido a temperaturas y presiones normales por lo que su elasticidad es despreciable. La figura 1 ilustra el prototipo usado.

**Tabla 1.**  
**Especificaciones del Robot**

Eslabón	Modelo	Torque	P/Rev
Base	DR1160B	60 Nm	819,200
Hombro	DR1100E	100 Nm	819,200
Codo	DM1004C	4 Nm	655,360

Los servomotores operan en *modo de torque*, lo que permite que el motor actúe como una fuente de torque aceptando señales de voltaje analógico como señales de

referencia. La información de la posición se obtiene de los encoders incrementales localizados en los motores. Además, los sensores de posición cuentan con una tarjeta driver manufacturada por la empresa *Precision MicroDynamic Inc.*

El algoritmo de control se ejecuta en una computadora *Pentium II* a 333 MHz. Con referencia a los motores direct-drive, sólo es requerido para implementar el nuevo esquema de control, ecuación (15), el vector del par gravitacional  $g(q)$  [11].

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.845 \sin(q_2) + 1.82 \sin(q_2 + q_3) \\ 1.82 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (32)$$



Figura 1. Robot Experimental ROTRADI

**IV-A. Resultados Experimentales**

El experimento consiste en colocar el efector final del robot manipulador en una posición deseada y comparar los controladores usados. Ya que el objetivo principal de este artículo es proponer un controlador y compararlo con el controlador PD debido a que es un controlador que cuenta con demostración formal de estabilidad, siendo este un controlador asintóticamente estable en forma global.

El vector de posiciones deseadas  $q_d$  para el experimento se define como:

$$q_d = \begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45^\circ \\ 90^\circ \end{bmatrix}, \quad (33)$$

siendo el valor de las matrices de ganancia proporcional

y derivativa,  $K_p$  y  $K_v$ , respectivamente, el descrito en la siguiente tabla:

**Tabla 2.**  
**Valor de las ganancias utilizadas**

Parámetro	Valor
$K_{p1}$	$782.7 \times 10^{-6}$ Nm
$K_{v1}$	$65.52 \times 10^{-6}$ Nm
$K_{p2}$	$1.325 \times 10^{-6}$ Nm
$K_{v2}$	$355.1 \times 10^{-3}$ Nm
$K_{p3}$	$23.15 \times 10^{-6}$ Nm
$K_{v3}$	$205.1 \times 10^{-12}$ Nm

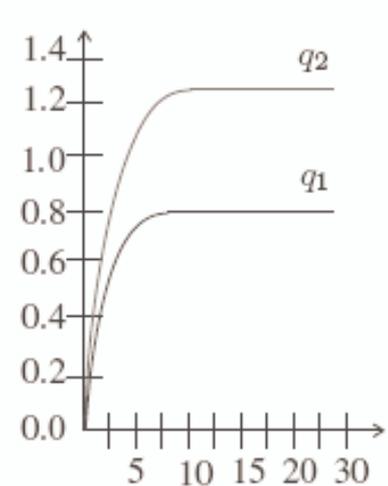


Figura 2. Controlador propuesto (Posición).

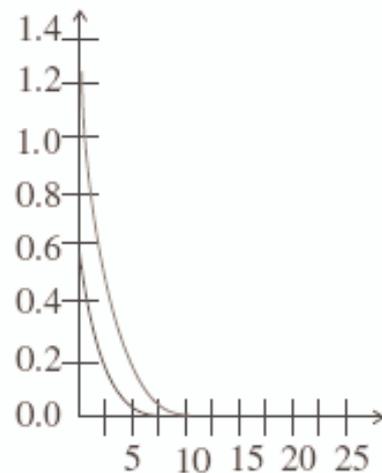


Figura 3. Controlador propuesto (Error)

#### IV-B. Índice de desempeño

El índice de desempeño se utiliza para medir la norma  $L^2$  del error de posición. Un valor pequeño de  $L^2$  representa un error pequeño y por lo tanto indica un mejor desempeño [21].

$$L^2[\tilde{q}] = \sqrt{\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t \|\tilde{q}\|^2 dt} \quad (34)$$

El índice de desempeño se ilustra en la figura 4, podemos observar que el índice de desempeño del control PD se asigna a  $\tau_{PD}$ , y el índice de desempeño de nuestro controlador a  $\tau_{\psi}$ .

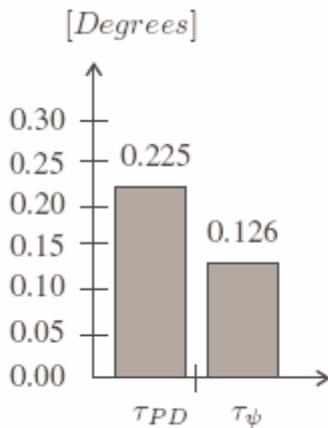


Figura 4. índice de Desempeño.

#### V. CONCLUSIONES

En este artículo se ha descrito un controlador articular que mejora en desempeño al controlador PD Simple. Mediante el análisis del índice de desempeño pudimos corroborar que el controlador propuesto tiene un mejor comportamiento, por lo que podemos concluir que el controlador propuesto es más rápido.

#### REFERENCIAS

[1] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, (New York: John Wiley and Sons Inc., 1976).  
 [2] C. S. G. Lee, R. C. González and K. S. Fu, *Tutorial on Robotics*, (Silver Springs, MD: IEEE Computer Society Press, 1986).  
 [3] M. Brady, J. H. Hollerbach, T. L. Johnson, T. Lozano-Perez, and M. T. Mason, *Robot Motion: Planning and Control*, (Cambridge, MA: MIT Press, 1982).

[4] A. J. Critchlow, *Introduction to Robotics*, (New York: Macmillan, 1985).  
 [5] G. Beni and S. Hackwood, *Recent Advances in Robotics*, (New York: Wiley, 1985).  
 [6] A. K. Becjzy, *Robot arm dynamics and control*, (Technical Memo 33-669, Pasadena, CA: NASA Jet Propulsion Laboratory, 1976).  
 [7] R. Kelly, R. Haber, R. Haber-Guerra and F. Reyes, Lyapunov Stable Control of Robot Manipulators: A Fuzzy Self-Tuning Procedure, *Intelligent Automation and Soft Computing*, 5(4), 1999, 313-326.  
 [8] F. Reyes and R. Kelly, Experimental Evaluation of Identification Schemes on a Direct Drive Robot, *Robotica*, 15(5), 1997, 563-571.  
 [9] A. Loria, *On Output Feedback Control of Euler-Lagrange*, (France: Université de Technologie de Compiègne, PhD Thesis, 1996).  
 [10] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, (Napoles, Italia: McGraw Hill, 1996).  
 [11] V. Santibáñez, R. Kelly and F. Reyes, A New Set-Point Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators, *IEEE transaction on Industrial Electronics*, 45(4), 1998, 126-133.  
 [12] R. J. Shilling, *Fundamentals of Robotics: Analysis and Control*, (Eaglewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990).  
 [13] W. S. Tang and J. Wang, Two recurrent neural networks for local joint torque optimization of kinematically redundant manipulators, *IEEE Transactions on Systems, man, and cybernetics*, 30(1), 2000, 120-128.  
 [14] F. Reyes and C. Campuzano, PD-Type Controller with Nonlinear Proporcional Gain for Robot Manipulators, *XX Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Puebla, México, 1998, 357-360.  
 [15] V. Santibáñez and R. Kelly, Analisis of Energy Shaping based controllers for elastic joint robots via passivity theory, *Proceedings of the 36th conference on decision and control*, San Diego, California, 1997, 1347-1352.  
 [16] V. Santibáñez and R. Kelly, A class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators, *Proceedings of the 1998 IEEE International conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, 1998, 3601-3606.  
 [17] G. Schreiber and G. Hirzinger, Singularity Consistent Inverse Kinematics by enhancing the Jacobian Transpose, *Proceeding of the Advances in Robot Kinematic: Analisis and Control ARK98*, Wolfgangsee, Germany, 1998, 209-216.  
 [18] M. Takegaki and S. Arimoto, A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, 102(2), 1981, 119-125.  
 [19] A. Loria and R. Ortega, Force/Position Regulation for Robot Manipulators with Unmeasurable Velocities and Uncertain Gravity, *Proceeding IFAC Workshop on Motion Control*, Munich, Germany, 1995.  
 [20] R. Kelly, V. Santibáñez and F. Reyes, A Class of Adaptive Regulators for robot manipulator, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 12(1), 1998, 41-62.  
 [21] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, (New Jersey: Prentice Hall, 2002).