

Modelado, Control y Simulación de un Sistema Péndulo Invertido Sobre Base Móvil

Gabriel Romero-Rodríguez, Pablo Sánchez-Sánchez, Fernando Reyes-Cortés, Antonio Michua-Camarillo, Benjamín Calderón-Flores, Jaime Cid-Monjaraz, Juan Carlos Torres-Monsivais y Gabriela Morales-Timal
Universidad Autónoma de Puebla, F. C. E., Grupo de Robótica *oocelo*
lepable@ece.buap.mx y freyes@ece.buap.mx

Resumen - El objetivo de este artículo consiste en obtener el modelo dinámico de un péndulo invertido sobre base móvil empleando la metodología de Euler-Lagrange y aplicar una estructura de control PD usando el método de moldeo de energía. Además, realizar la simulación del modelo dinámico y el control en dos plataformas de simulación.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido es uno de los ejemplos más conocidos de sistemas para estabilizar, fue ampliamente estudiado por la comunidad científica, y actualmente es un problema importante de control, ya que cada vez hay más sistemas que pueden aproximarse con este modelo. El interés de este trabajo reside en obtener un modelo matemático que describa la dinámica del sistema, por lo que se emplea la metodología de Euler-Lagrange la cual considera la diferencia de energía presente en el sistema (cinética y potencial). Se hace uso de la técnica conocida como moldeo de energía en la estructura de control PD para controlar al péndulo. Uno de los pasos más importantes del modelado y control consiste en la validación mediante una simulación. Por lo que las expresiones matemáticas del modelo dinámico y las estructuras de control son evaluadas en la plataforma de simulación SIMNON®, la cuál es una herramienta que utiliza un conjunto de elementos para describir el comportamiento de sistemas no lineales, como lo es el modelo dinámico, el cual describe desde un punto de vista matemático el comportamiento del sistema a un estímulo específico. Por lo tanto la validación se realiza al comparar el comportamiento de la simulación con el del sistema real.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección II se realiza una breve descripción del prototipo mecánico, en la sección III se describen las ecuaciones de Euler-Lagrange y se obtienen las ecuaciones del modelo dinámico del péndulo; en la sección IV se describe la técnica de moldeo de energía con un controlador lineal tipo PD y se realiza su comprobación de estabilidad por Lyapunov; en la sección V se realiza la simulación del modelo y control en dos plataformas de simulación y finalmente las conclusiones se puntualizan en la sección VI.

II. SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO

El péndulo invertido sobre base móvil es un sistema que consiste en una varilla que gira libremente por una de sus extremos por una articulación en la base tipo carro que se mueve en un riel horizontal rectilíneo por la acción de una fuerza \mathcal{T} paralela al riel, esta fuerza \mathcal{T} es la ley de control con la que se pretende controlar la posición de la varilla.



Figura 1. Péndulo invertido sobre base móvil.

El péndulo gira en un plano vertical alrededor de un eje localizado en el centro de la base y perpendicular al plano vertical mencionado. Puesto que el sistema del péndulo invertido tiene dos grados de libertad y sólo un actuador se trata de un sistema sub-actuado.

III. DINÁMICA DEL PÉNDULO

Para proponer estructuras de control es necesario contar con una representación matemática que describa el comportamiento del prototipo mediante las leyes físicas que lo rigen. El modelo dinámico es un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema a un estímulo específico.

III-A. Metodología Euler-Lagrange

La metodología de Euler-Lagrange utiliza la energía total del sistema $E(q, \dot{q})$ definida como la diferencia entre la energía cinética $K(q, \dot{q})$ y la energía potencial $U(q)$. Partiendo de estas consideraciones al resolver la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema conservativo, la ecuación que se define como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau - f(\tau, \dot{q}), \quad (1)$$

donde $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son vectores de desplazamiento y velocidad respectivamente, $f(\tau, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fricción, \mathcal{T} es un vector de fuerzas y pares aplicados a las coordenadas generalizadas

y el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ es la diferencia entre la energía cinética y la potencial,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \quad (2)$$

El modelo dinámico del péndulo en general para un robot de n grados de libertad con ausencia de fricción y otras perturbaciones se escribe como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3)$$

donde $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son el vector de posición, velocidad y aceleración articular del robot, respectivamente, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Inercias, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerza Centrípeta, $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional. Para proponer una estructura de control, el modelo dinámico debe cumplir ciertas propiedades fundamentales:

Propiedad 1. La matriz de inercias $M(q)$ es una matriz definida positiva $M(q) > 0$, es simétrica $M(q) > 0 \Rightarrow \exists M^{-1}(q) > 0$, y está acotada,

$$\mu_1(q)I \leq M(q) \leq \mu_2(q)I \quad (4)$$

donde I es la matriz Identidad, $\mu_1(q) \neq 0$ y $\mu_2(q)$ es una constante escalar para una revolución de una articulación, generalmente es una función escalar de q para una articulación prismática.

Propiedad 2. Se considera la matriz antisimétrica $\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} \equiv 0$, así:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (5)$$

La matriz $C(q, \dot{q})$ es una matriz lineal con respecto a \dot{q} desde $k_c \in \mathbb{R}^+$, es decir:

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq k_c(q) \|\dot{q}\| \quad (6)$$

donde $k_c(q)$ es una constante escalar para una revolución articular, generalmente q es una función para una articulación prismática.

Propiedad 3. El par gravitacional $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se obtiene mediante el gradiente de la energía potencial $\mathcal{U}(q)$ del sistema.

$$g(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \quad (7)$$

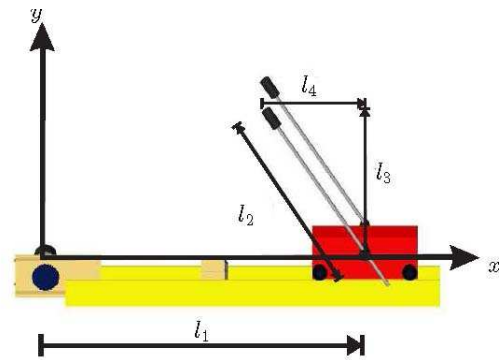
donde $\mathcal{U}(q)$ es la energía potencial expresada en el espacio de operación y está acotada como:

$$\left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\| \leq k_g \quad (8)$$

donde k_g es un escalar constante.

III-B. Modelo dinámico Euler-Lagrange

Como primer paso para obtener el modelo dinámico del péndulo se analiza su posición en el espacio mediante la cinemática directa la cual relaciona las coordenadas articulares a coordenadas cartesianas.



Figura

2. Cinemática del péndulo invertido.

De la figura (2) se tienen la cinemática del péndulo y del carro como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - l_2 \sin(q_2) \\ -l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde al derivar la posición se tiene la velocidad, y se eleva al cuadrado usando la siguiente propiedad $V^2 = V^T V$, esto debido a que se emplea dicha velocidad en la energía cinética:

$$v_1^2 = \dot{q}_1^2 \quad (11)$$

$$v_2^2 = \dot{q}_1^2 - 2l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 \quad (12)$$

Después usando la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$ se tiene:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_c \dot{q}_1^2 \quad (13)$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} m_p [\dot{q}_1^2 - 2l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_2^2 \dot{q}_2^2] + \frac{1}{2} I \dot{q}_2^2 \quad (14)$$

y usando la energía potencial $U(q) = mgh$ tenemos:

$$U(q_1) = 0 \quad (15)$$

$$U(q_2) = m_p g l_2 \cos(q_2) \quad (16)$$

Al aplicar el Lagrangiano (2) se tiene:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} m_c \dot{q}_1^2 \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_2 = \left(\frac{1}{2} m_p \left[\dot{q}_1^2 - 2l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 \right] + \frac{1}{2} I \dot{q}_2^2 \right) - m_p g l_2 \cos(q_2) \quad (18)$$

y usando la propiedad $L_T = L_1 + L_2$ tenemos:

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} m_p \left[\dot{q}_1^2 - 2l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 \right] + \frac{1}{2} I \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_c \dot{q}_1^2 - m_p g l_2 \cos(q_2) \quad (19)$$

Ahora, podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (1) para el carro tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = (m_c + m_p) \ddot{q}_1 - m_p l_2 \left(\cos(q_2) \ddot{q}_2 - \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \right) = \tau - f_c, \quad (20)$$

y para el péndulo tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = [(m_p l_2^2 + I) \ddot{q}_2 - m_p l_2 (\cos(q_2) \ddot{q}_1 - \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2)] - [m_p l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_p g l_2 \sin(q_2)] = 0 - f_p. \quad (21)$$

Aplicando la ecuación (3) a las ecuaciones obtenidas y sustituyendo todos los términos, tenemos:

$$\begin{bmatrix} m_p + m_c & -m_p l_2 \cos(q_2) \\ -m_p l_2 \cos(q_2) & m_p l_2^2 + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_p l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2}{2} \\ \frac{m_p l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

IV. DISEÑO DE CONTROL

Existen diferentes técnicas para proponer estructuras de control, típicamente se emplea el método de moldeo de energía para coordenadas articulares. Para analizar estabilidad se emplea la teoría de Lyapunov. El moldeo de energía considera el modelo dinámico sin la existencia de perturbaciones externas:

$$\tau = \nabla U(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \quad (23)$$

donde $U(K_p, \tilde{q})$ es la energía potencial artificial que depende de K_p y está definida como:

$$U(K_p, \tilde{q}) = \frac{f(\tilde{q})^T K_p f(\tilde{q})}{2} \quad (24)$$

y $f_v(K_v, \dot{q})$ es una función que depende de una función de amortiguamiento K_v . Donde K_p y K_v son las ganancias proporcional y derivativa respectivamente.

Para analizar la estabilidad de la estructura de control, se describe la función de Lyapunov como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + U(K_p, \tilde{q}), \quad (25)$$

El método de moldeo de energía trata de hallar una función candidata $U(k_p, \tilde{q})$ que cumpla con las condiciones de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 0 & \forall \tilde{q}, \dot{q} &= 0 \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &\leq 0 & \forall \tilde{q}, \dot{q} &\neq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

tal que al derivar la función de Lyapunov:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q) \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{\partial \mathcal{U}(K_p, \tilde{q})^T}{\partial(\tilde{q})} \dot{\tilde{q}}, \quad (27)$$

se obtiene la estabilidad del punto de equilibrio, mediante la condición:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq 0. \quad (28)$$

Comprobando la estabilidad asintótica global mediante el teorema de LaSalle:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) < 0. \quad (29)$$

IV-A. Controlador PD

Típicamente el controlador PD se define como:

$$\tau = K_p(\tilde{q}) - K_v(\dot{\tilde{q}}) + g(q) \quad (30)$$

donde $\tilde{q} = q_d - q$ denota el error de posición definido como la diferencia entre la posición deseada q_d menos la posición actual q , K_p y K_v son la ganancia derivativa y proporcional respectivamente y τ es el vector del par aplicado. Sustituyendo la estructura de control en la ecuación del modelo dinámico se tiene:

$$M(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + g(q) = K_p(\tilde{q}) - K_v(\dot{\tilde{q}}) + g(q) \quad (31)$$

reduciendo los términos, al despejar $\ddot{\tilde{q}}$ y haciendo uso de las variables de estado podemos escribir el sistema en lazo cerrado como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1}[K_p\tilde{q} - K_v\dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (32)$$

Ahora bien, se propone una función candidata de Lyapunov, con base en la ecuación (25):

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \quad (33)$$

Se observa como cumple con las condiciones (26). Al derivar la función propuesta tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q) \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \quad (34)$$

Al sustituir $\ddot{\tilde{q}}$ (32) en la ecuación (34) tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q) [M(q)^{-1}[K_p\tilde{q} - K_v\dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}}] + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}}] + \quad (35)$$

Realizando la multiplicación se elimina el término $M(q)$ y la ecuación queda como:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T C(q, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \quad (36)$$

Eliminando términos y haciendo uso de la propiedad de antisimetría (5) tenemos que:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} \leq 0 \quad (37)$$

La derivada de la función de Lyapunov es semidefinida negativa, por lo que el punto de equilibrio es estable, según la condición (28), de manera que es posible comprobar estabilidad asintótica global usando el teorema de LaSalle (29):

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} < 0 \quad (38)$$

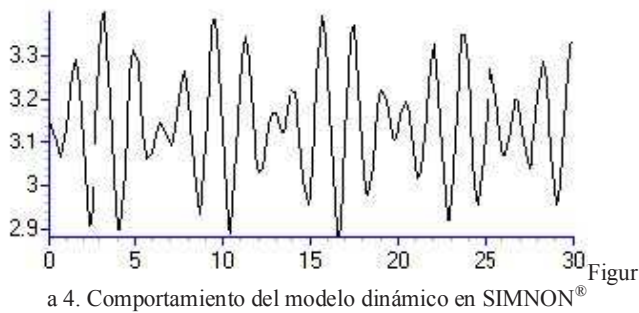
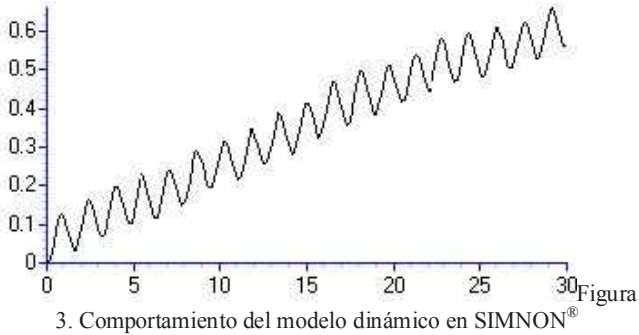
V. SIMULACIÓN

Un simulador es una herramienta que reproduce el comportamiento de un sistema mediante las ecuaciones matemáticas que lo describen. Además de las ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del sistema, una simulación requiere los parámetros físicos que se presentan en la tabla 1:

Tabla 1. PARÁMETROS DEL PÉNDULO INVERTIDO

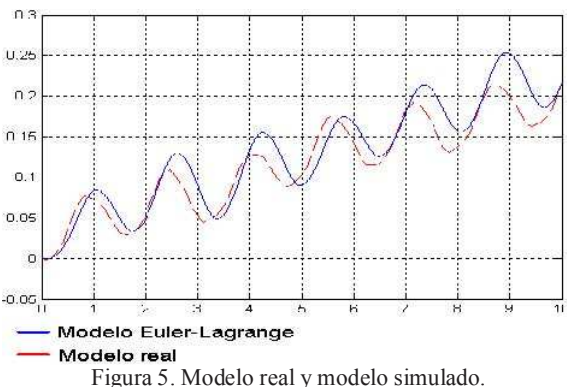
Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del péndulo y del carro	$m_e + m_p$	1,462
Distancia al centro de masa	L	0,016
Momento de inercia	I	0,024
Fricción viscosa positiva	b_+	4,200
Fricción viscosa negativa	b_-	4,120
Fricción de Coulomb positiva	f_{c+}	1,260
Fricción de Coulomb negativa	f_{c-}	1,604
Fricción estática positiva	f_{s+}	0,700
Fricción estática negativa	f_{s-}	1,000

A continuación se muestran los resultados de la simulación del modelo dinámico obtenidos en la plataforma de SIMNON®:

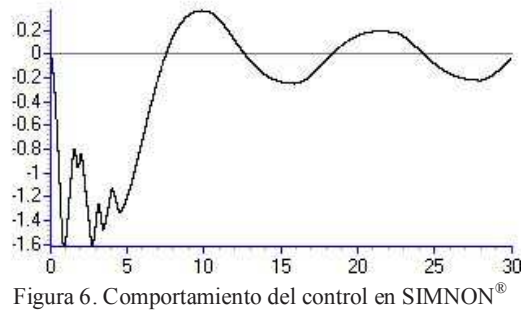


En las figuras (3,4) se observa el comportamiento de la posición lineal y angular, movimientos presentes en el carro y péndulo. El fenómeno presente en el sistema resulta un movimiento lineal y uno oscilatorio los cuales muestran el comportamiento natural del sistema ante un estímulo senoidal.

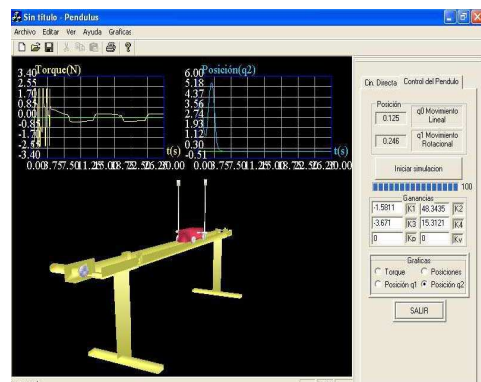
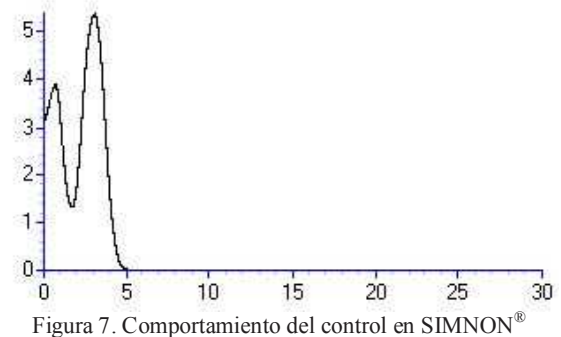
La figura (5) muestra la comparación de comportamiento del modelo simulado y el modelo real ante una misma excitación.



A continuación se muestra el comportamiento de la estructura de control PD, que se programó en SIMNON® junto con el modelo dinámico.



Podemos observar el comportamiento del sistema ante la estructura de control PD, figura (6) donde se observa como la posición lineal (carro) parte de una condición inicial cero y después, al recibir el estímulo del control se ubica nuevamente en cero. Así como en la figura (7) se muestra el comportamiento de la posición angular (péndulo), la cual parte de la condición inicial π es decir está en la posición de reposo y al recibir la energía de la estructura de control se balancea hasta llegar a la posición inestable de equilibrio (cero). Ahora se emplea una plataforma de simulación alterna (8) para el péndulo invertido, donde se desarrollan las mismas pruebas con estructuras de control PD, así como los parámetros y ganancias y se muestra su comportamiento en la figura (9).



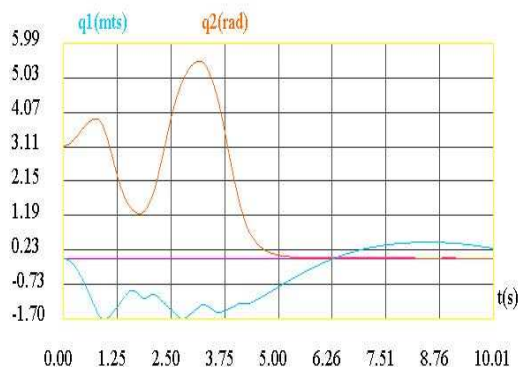


Figura 9. Posición lineal y rotacional del péndulo para el control PD

A continuación se realiza una comparación gráfica entre la plataforma de simulación SIMNON® y el simulador alterno, para el caso del control PD. Se puede observar como la respuesta en la plataforma de simulación alterna para el control PD es similar a la respuesta obtenida en SIMNON®.

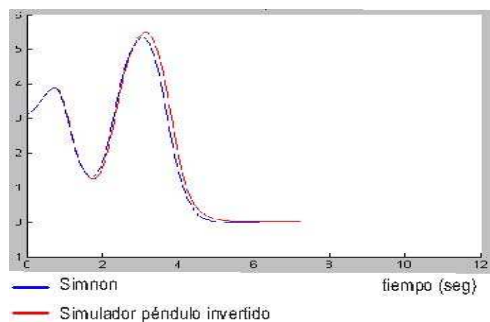


Figura 10. Comparación entre SIMNON® y el simulador propuesto

VI. CONCLUSIONES

Como se pudo observar en las simulaciones realizadas, se comprobó que la obtención de las ecuaciones matemáticas que describen al prototipo son confiables y representan a los fenómenos existentes en dicho sistema. Por otra parte se simuló una estructura de control para ubicar al péndulo en la posición de inestabilidad. Debido a que la simulación realizada tanto en la plataforma alterna como en SIMNON® fue satisfactoria podemos concluir que las ecuaciones de la dinámico como las de control controlan y representan los fenómenos físicos presentes en el sistema del péndulo invertido.

REFERENCIAS

[1] J. Aracil, F. Gordillo, *El Péndulo Invertido: Un Desafío para el Control No Lineal*, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, CEA-IFAC, 2005

[2] G. Piriz Mira, J. García del Prado, L. Rodríguez Cid, *Topología de presas, Métodos de Auscultación*, Centro Universitario de Mérida, Universidad de Extremadura, Julio de 20002

[3] K. Ogata, *"Teoría de Control y Sistemas Dinámicos"* (Cap. 3, Prentice Hall Hispanoamericana).

[4] Karl J. Åström, Daniel J. Block y Mark W. Spong, *El péndulo con volante de inercia*, Departamento de Control Automático, Colegio de Ingeniería en Sistemas de Control y Laboratorios Científicos Coordinados, del Instituto Tecnológico de London, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign respectivamente, Cap. 1, 2001.

[5] Jerry B. Marion, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*, Cap.12, Pags. 409-58, Reverté, S.A., España, 1984.

[6] Patricia Mellodge, *Abstracción de Modelos en Sistemas Dinámicos: Aplicación a Control de Robots Móviles*, Tesis Doctoral, Instituto Tecnológico de Virginia, 2007

[7] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 3ra. Edición, Cap. 2, San Francisco, 2002.

[8] Ronald L. Huston, C. Q. Liu, *Formulas for Dynamic Analysis*, CRS Press, Chapter 10, 2001.

[9] Watson Fulks, *ADVANCED CALCULUS, An Introduction Analysis*, John Wiley & Sons Inc., Cap. 10, Pg. 230-31, EEUU, 1969.

[10] Mark W. Spong, *Swing Up Control of the Acrobot Using Partial Feedback Linearization*, Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.

[11] V. V. Alexandrov, S. I. Zlochevskii, R. Reyes Sánchez, H. Salazar Ibarquén, *Introducción a la Modelación Matemática de los Sistemas Controlables.*, Cap. 2, Pag. 47, BUAP, Puebla, 2000.

[12] Rafael Kelly y Víctor Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores.*, PEARSON EDUCACION, S. A., Pg. 281-283, Madrid, 2003.

[13] Red Normas y Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas

[14] G. Edyson, J. Larriva, J. Trelles, *Control de un Péndulo Invertido*, Cuenca Ecuador ,2003

[15] A. Viguria, A. Prieto, M. Fiacchini, R. Cano, F. R. Rubio, J. Aracil, C. Canudas-de-Wit, *Desarrollo y Experimentación de un Vehículo Basado en Péndulo Invertido (PPCAR)*, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, España, Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS-LAG), Francia.

[16] A. Valera, M. Vallés, M. Cardo, *Desarrollo y Control de un Péndulo de Furuta*, Universidad Politécnica de Valencia.

[17] Feedback Digital Pendulum, *Control Experiments*, Website: <http://www.fbk.com>, Chapter 3, Printed in England by FI Ltd, Crowborough

[18] Gunter Stein, *Respect the Unstable*, IEEE Control Systems Magazine, Agosto 2003.

[19] María Marta Serón, *Sistemas Dinámicos y Procesamiento de Señales*, Universidad Nacional del Rosario, Cap. 3, Sec. 1, Pg. 5, 2000.