

Compensación en Adelanto de Fase: Una nueva Propuesta de Solución Única y Exacta

Barahona Avalos Jorge Luis⁽¹⁾, Linares Flores Jesús⁽¹⁾, Espinosa Maya Luis Eduardo⁽²⁾ y Villegas Rosas Gerardo⁽²⁾

⁽¹⁾ Jefatura de Ingeniería en Mecatrónica, Instituto de Electrónica y Computación, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Km 2.5 Carretera a Acatlima S/N, C.P. 69000, Huajuapán de León, Oaxaca.

⁽²⁾ Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Av. 18 Sur y Sn. Claudio S/N, Col. San Manuel, C. P. 72570, Puebla, Pue.

Resumen

La compensación de fase es una de las técnicas más comúnmente usadas para el diseño de sistemas de control lineales en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo, especialmente utilizando el diagrama de Bode o técnicas del Lugar geométrico de las raíces. No obstante, en la mayoría de los casos se emplean aproximaciones a prueba y error, por lo general en forma gráfica. Este trabajo presenta una nueva solución única y exacta al diseño de compensadores en adelanto cuando se conocen los márgenes de ganancia y de fase deseados (obtenidos a partir de las especificaciones de desempeño deseadas). El método propuesto sólo requiere de la determinación de la frecuencia de cruce de ganancia para lograr el margen de fase deseado. Se presenta el sustento teórico formal de la propuesta de solución, así como su aplicación a un sistema físico.

Palabras clave: Diagrama de Bode, Compensación de adelanto, Método de diseño en la frecuencia

1. Introducción

El diseño de compensadores de adelanto en el dominio de la frecuencia es una cuestión central en los cursos fundamentales de Ingeniería de control, debido a su importancia práctica. Una de las principales dificultades encontradas al momento de diseñar compensadores de fase para sistemas LTI, es que dicho proceso de diseño es tedioso toda vez que el mismo es producto de una serie de ensayos a prueba y error. Los métodos hasta ahora conocidos están basados en el uso de los Diagramas de Bode o bien del lugar geométrico de las raíces, como se explica ampliamente en textos especializados en control de sistemas LTI [1, 2, 3]. El objetivo principal del presente trabajo es proponer una solución analítica al diseño de compensadores de adelanto cuando se conocen los márgenes de ganancia y de

fase. Con la solución propuesta se encuentra una solución única que facilita la implementación de compensadores de una sola etapa. Cabe aclarar que la solución propuesta es más bien con fines didácticos para facilitar la labor de enseñanza del diseño de ese tipo de compensadores en el aula de clases, invirtiendo para ello menos tiempo y disminuyendo el grado de confusión que típicamente produce en los estudiantes el diseño de compensadores clásico basado en métodos de respuesta en frecuencia [1].

Sin considerar los avances en las técnicas modernas para el diseño de sistemas de control, muchos diseños, especialmente los de tipo industrial, todavía hoy en día se realizan mediante métodos del control clásico, principalmente de respuesta en frecuencia. Debido a su simplicidad y fácil implementación el método más popular de compensación es el denominado en serie [1]. A lo largo de las tres últimas décadas, educadores e investigadores han estado explotando métodos de diseño sistemáticos y/o que no son a prueba y error [4, 5, 6].

En 1976, Wakeland encontró una solución analítica al diseño de compensadores de adelanto de fase de una sola etapa [7]. Dicha solución es de forma cuadrática en términos de la ganancia de compensación. Al año siguiente Mitchell mejoró la solución de Wakeland ya que su propuesta podía ser utilizada para el diseño de compensadores de adelanto y/o atraso [5]. En el año 2003, Wang presentó una solución única simple a ambos problemas de compensación en adelanto y/o atraso que mejoró las soluciones propuestas con anterioridad [4]. Sin embargo, los métodos mencionados con anterioridad suponen el conocimiento *a priori* de la frecuencia de cruce de ganancia, como una especificación del diseño. Esto simplifica en gran medida el procedimiento de diseño y hace que el mismo sea posible sin prueba y error. De hecho, el

procedimiento a prueba y error tradicional obedece precisamente a la dificultad para determinar la frecuencia de la ganancia de cruce.

Derivado de la experiencia de los autores en la enseñanza de diseño de sistemas de control a lo largo de varios años, se observa que, por un lado, los métodos de diseño sofisticados [4, 5, 6, 7] son más orientados a investigación y menos pedagógicos para la enseñanza a nivel licenciatura donde típicamente los estudiantes necesitan dominar los fundamentos de la ingeniería de control en cursos de entre 60 y 85 horas. En este trabajo se expone un trabajo totalmente diferente para el diseño de compensadores de adelanto, el cual es más pedagógico. La característica distintiva de la solución propuesta radica en el hecho de que la frecuencia de cruce de ganancia puede ser determinada en términos de la ganancia y del margen de fase de la planta y del margen de fase requerido. También se hace uso de la potencialidad de métodos computacionales, particularmente de métodos numéricos de búsqueda de raíces de funciones no lineales.

Éste trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se describe en que consiste la compensación en adelanto, incluyendo algunas consideraciones preliminares, el diseño tradicional y la nueva propuesta de diseño. En la sección 3 se expone un caso de estudio de aplicación del método tradicional y de la nueva propuesta a un sistema físico en particular. En la sección 4 se resumen algunos de los resultados de simulación obtenidos con fines de comparación y finalmente en la sección 5 se dan algunas conclusiones.

2. Diseño de compensadores de adelanto

2.1 Compensación de Adelanto

La presente sub – sección es derivada fuertemente de [1], no obstante es pertinente aclarar que en dicho texto no se expone con claridad la forma en la cual se derivan las fórmulas empleadas para el diseño tradicional a prueba y error ahí expuesto, para el caso de la compensación de adelanto de fase. Derivado de lo anterior, y con fines de claridad, a continuación se expone en forma detallada lo referente a la compensación de adelanto. Considérese el compensador de adelanto cuya función de transferencia está dada por:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} = K \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad (1)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}_+$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$ son parámetros característicos del compensador y $K \in \mathbb{R}_+$ es su ganancia de cd. Para el diseño del compensador, la ganancia de cd queda determinada en forma unívoca por la especificación del desempeño en estado estacionario, la cual típicamente es expresada en términos de la constante de error estática de velocidad deseada $\bar{K}_v \in \mathbb{R}_+$. Por lo anterior, en éste trabajo el enfoque estará únicamente sobre el factor:

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad (2)$$

y cuya función de transferencia senoidal correspondiente es de la forma:

$$G_c(j\omega) = \frac{j\omega\tau + 1}{j\alpha\omega\tau + 1} \quad (3)$$

el cual proporciona el adelanto de fase requerido en la frecuencia de cruce de ganancia con valores apropiados de τ y α , a fin de satisfacer el requerimiento del margen de fase deseado y el cual se denotará como $\bar{\phi}$. En la Figura 1 se muestran los gráficos de Bode de magnitud y fase correspondientes a la ecuación (3); de dicha figura puede apreciarse que (3) contribuirá a lo más con un adelanto de fase máximo denotado por ϕ_m , el cual ocurrirá en una frecuencia ω_m .

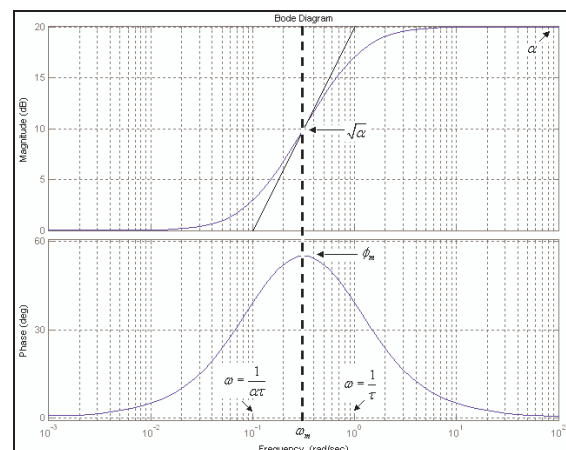


Figura 1: Gráficos de Bode de un compensador de adelanto.

A continuación, por razones de claridad, se derivan las propiedades del compensador dado por la ecuación (3) y graficado en la Figura 1. La magnitud y fase del compensador dado en (3) pueden ser escritas como:

$$|G_c(j\omega)| = \left| \frac{j\omega\tau + 1}{j\alpha\omega\tau + 1} \right| = \frac{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}{\sqrt{(\alpha\omega\tau)^2 + 1}} \quad (4)$$

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}(\omega\tau) - \tan^{-1}(\alpha\omega\tau) \quad (5)$$

derivando (5) con respecto a ω se tiene:

$$\frac{d}{d\omega}(\angle G_c(j\omega)) = \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{\alpha\omega\tau}{1+(\alpha\omega\tau)^2}$$

igualando a cero la expresión anterior y después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{\alpha\omega\tau}{1+(\alpha\omega\tau)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} &= \frac{\alpha\omega\tau}{1+(\alpha\omega\tau)^2} \\ \Leftrightarrow \alpha\omega^2\tau^2(1-\alpha) &= 1-\alpha \\ \Leftrightarrow \alpha\omega^2\tau^2 &= 1 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{\alpha\tau^2} \\ \Leftrightarrow \omega &= \pm \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

considerando sólo frecuencias positivas; la frecuencia así obtenida es un punto crítico el cual al ser evaluado en la segunda derivada con respecto a ω da un valor negativo, por lo se alcanza el máximo ángulo de fase aportado por el compensador; tal frecuencia se escribe como sigue:

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \quad (6)$$

sustituyendo (6) en (5) se obtiene:

$$\angle G_c(j\omega_m) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \tan^{-1}(\sqrt{\alpha})$$

haciendo uso de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos(\sin^{-1} x) &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

y después de algunas manipulaciones algebraicas se llega al siguiente desarrollo:

$$\phi_m = \angle G_c(j\omega_m) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \phi_m = \sin\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin \phi_m = \left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\right) - \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \phi_m = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

de donde finalmente se obtiene para el parámetro α del compensador:

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin \phi_m}{1+\sin \phi_m} \quad (7)$$

Ahora bien, sustituyendo (6) en (4) y manipulando algebraicamente, se tiene para la magnitud máxima aportada por el compensador:

$$|G_c(j\omega_m)| = \left| \frac{j\omega\tau + 1}{j\alpha\omega\tau + 1} \right| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha}{1+\alpha}}$$

de donde finalmente se obtiene:

$$|G_c(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha} \quad (8)$$

Enseguida, al considerar que $G(j\omega)$ es la función de transferencia senoidal de la planta a controlar, y ω_c es la frecuencia de cruce de ganancia de $KG(j\omega)$, al elegir $\omega_m = \omega_c$, entonces las condiciones de magnitud y fase del sistema compensado se pueden expresar como:

$$\bar{\phi} = \phi_m + \angle(G(j\omega_c)) + \pi \quad (9)$$

$$|G_c(j\omega_c)| = \frac{1}{|KG(j\omega_c)|} \quad (10)$$

2.2 Compensación de Adelanto Tradicional

El problema inherente al método de diseño tradicional expuesto en [1], recae en la selección de la frecuencia de cruce de ganancia ω_c . Ésta deberá de satisfacer las condiciones expresadas en (9) y (10). De acuerdo con el procedimiento de diseño presentado por Ogata [1], primero se emplea la condición de fase (3) para determinar el margen de fase requerido ϕ_m a una frecuencia ω_i que resulta de evaluar $|KG(j\omega_i)| = 1$. Sin embargo nótese que esto es incorrecto toda vez que ω_c deberá de ser

obtenida de la condición de magnitud dada en (4), es decir de $|KG_c(j\omega_i)G(j\omega_i)|=1$, la cual es diferente de $|KG(j\omega_i)|=1$. Como consecuencia directa de lo anterior, la frecuencia de cruce de ganancia real $\omega_c > \omega_i$ puesto que es evidente que $|KG_c(j\omega)G(j\omega)| > |KG(j\omega)|$. Así, $\omega_c > \omega_i$ conduce a que $\angle G(j\omega_c) < \angle G(j\omega_i)$, y el margen de fase ϕ_m de adelanto requerido calculado en ω_i es inadecuado. El texto plantea que esta situación puede remediarse simplemente agregando una cantidad de adelanto de fase extra de entre 5° a 12° al margen de fase deseado. No obstante es evidente que dicho remedio es a prueba y error y típicamente produce confusión entre los estudiantes de Ingeniería de Control a nivel licenciatura.

2.3 Propuesta de diseño

En el presente trabajo, se aborda el problema de proporcionar una solución al diseño de compensadores en adelanto de fase que no sea a prueba y error, sino que proporcione una forma analítica de resolver el problema. La solución aquí propuesta emplea la ganancia y el margen de fase de la planta sin compensar para determinar la frecuencia de cruce de ganancia ω_c . La solución simplemente radica en encontrar ω_c resolviendo simultáneamente las ecuaciones (9) y (10). A continuación se detalla el sustento teórico formal de la solución.

Seleccionando $\omega_c = \omega_m$, a partir de las ecuaciones (8) y (10), se tiene:

$$|G_c(j\omega_c)| = \frac{1}{|KG(j\omega_c)|} = \sqrt{\alpha} \quad (11)$$

despejando para α de la ecuación (11) se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{|KG(j\omega_c)|^2} \quad (12)$$

por otro lado de (7), despejando para ϕ_m :

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \phi_m = \sin^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \quad (13)$$

sustituyendo (12) y (13) en la ecuación (9), y después de algo de álgebra:

$$\bar{\phi} = \sin^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) + \angle(G(j\omega_c)) + \pi$$

$$\bar{\phi} = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{|KG(j\omega_c)|^2}}{1 + \frac{1}{|KG(j\omega_c)|^2}} \right) + \angle(G(j\omega_c)) + \pi$$

de donde finalmente se tiene:

$$\bar{\phi} = \sin^{-1} \left(\frac{|KG(j\omega_c)|^2 - 1}{|KG(j\omega_c)|^2 + 1} \right) + \angle(G(j\omega_c)) + \pi \quad (14)$$

Para un margen de fase deseado $\bar{\phi}$, la única incógnita en la ecuación (14) es ω_c . Cuando se conoce la función de transferencia de la planta, pueden emplearse algoritmos de búsqueda de raíces de funciones no lineales para hallar ω_c , seleccionando como condición inicial del algoritmo la frecuencia de cruce de ganancia de $KG(j\omega)$. Finalmente, empleando (6) y (12), los parámetros de diseño del compensador pueden ser calculados de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$\alpha = \frac{1}{|KG(j\omega_c)|^2} \quad (15)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \quad (16)$$

En éste trabajo el algoritmo de búsqueda de raíces elegido fue el de Newton iterativo a fin de resolver (14) para hallar ω_c .

3. Caso de estudio

Para propósitos de indagar la efectividad de la metodología de diseño propuesto se seleccionó un sistema físico de control de temperatura, el LTR701, del fabricante Amira, el cual se muestra en la Figura 2. En el presente artículo se presentan únicamente resultados de simulación, dejando como trabajo futuro la comprobación experimental del diseño obtenido.



Figura 2: Sistema de Temperatura LTR701.

De acuerdo con el manual del fabricante, la función de transferencia aproximada del sistema de temperatura LTR701 está dada por:

$$G(s) = e^{-0.8s} \frac{0.485}{12.6s + 1} \quad (17)$$

utilizando una aproximación de Pade de primer orden, para aproximar el retardo presente en (17) se tiene:

$$G(s) = \left(\frac{2.5 - s}{2.5 + s} \right) \left(\frac{0.485}{12.6s + 1} \right) = \frac{-0.485s + 1.2125}{12.6s^2 + 32.5s + 2.5}$$

o bien:

$$G(s) = \frac{-0.0385s + 0.0962}{s^2 + 2.5794s + 0.1984} \quad (18)$$

Los gráficos de Bode correspondientes para la función de transferencia dada en (18), para $K = 35$ se muestran en la Figura 3. De dicha figura puede verse que la frecuencia de cruce de ganancia es de alrededor de 1.92 rad/s con un margen de fase de 17.2°.

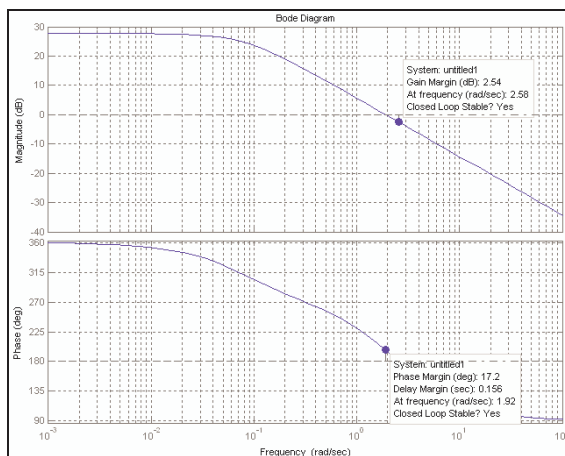


Figura 3: Gráficos de Bode del sistema LTR701 sin compensar.

4. Resultados

Con respecto a los resultados de simulación, se elige como consideración de diseño un margen de fase deseado $\bar{\phi} = 35^\circ$. Entonces empleando un algoritmo de búsqueda de raíces Newton Iterativo, combinando las ecuaciones (14) y (18), se determinó el valor de ω_c . Entonces se emplearon las fórmulas (15) y (16) para calcular los parámetros del compensador de adelanto, cuya función de transferencia queda como:

$$G_c(s) = \frac{0.0985s + 1}{0.00485s + 1} \quad (19)$$

En la Figura 4 se muestran los resultados de comparación de la respuesta ante una entrada escalón para ambos métodos de diseño, el tradicional se muestra en color verde y el propuesto en color azul; como puede apreciarse del gráfico mostrado, los resultados de simulación permiten concluir cautelosamente que el diseño propuesto mejora significativamente la respuesta en lazo cerrado, comparada contra el método tradicional.

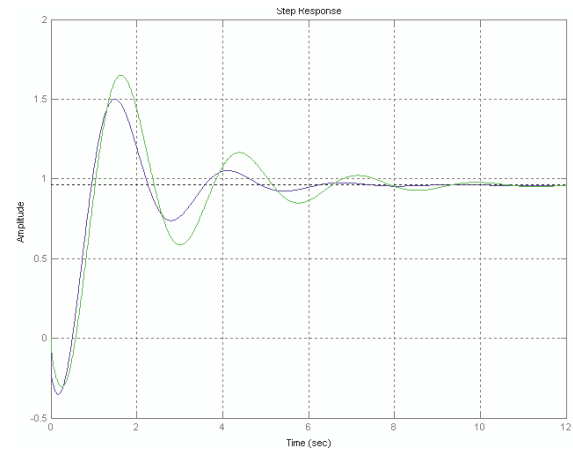


Figura 4: Resultados de Simulación.

5. Conclusiones

El principal objetivo del presente trabajo consistió en atacar el problema del diseño de compensadores en adelanto de forma analítica. La principal motivación para el desarrollo del mismo fue el hecho de que los métodos de diseño tradicionales provocan demasiada confusión entre los estudiantes de cursos de ingeniería de control a nivel licenciatura. Es por ello que éste trabajo contribuye en gran manera, toda vez que los resultados presentados permiten concluir que la solución

propuesta satisface adecuadamente las consideraciones de diseño. Como trabajo futuro se desarrollarán aproximaciones similares para los casos de la compensación en atraso y la de adelanto – atraso.

Referencias

- [1] Ogata K. “*Ingeniería de Control Moderna*”, Prentice Hall, México, 3ª edición, 1998.
- [2] Dorf R. “*Sistemas Modernos de Control: Teoría y Práctica*”, Addison – Wesley, México, 2ª edición, 1989.
- [3] Nise N. “*Control Systems Engineering*”, Wiley, New York, 3rd edition, 2000.
- [4] Wang F. “*The exact and unique solution for phase – lead and phase – lag compensation*”, *IEEE Transactions on Education*. Vol (46), Num (2), 2003.
- [5] Mitchell J. “*Comments bode compensator design*”, *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol (AC-22), Núm (5), 1977.
- [6] Yeung K. “*A non – trial – and – error method for lag – lead compensator design*”, *IEEE Transactions on Education*. Vol (41), Num (1), 1998.
- [7] Wakeland W. “*Bode Compensator Design*”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, October, 1976.