

Diseño de un Control Óptimo en Tiempo Continuo para la Estabilización de Trayectorias en un Robot Móvil

Morín Castillo María Montserrat, Hernández Angulo Lucio y
Gutiérrez Arias José Eligio Moisés

Facultad de Ciencias de la Electrónica.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel, C.P. 72570, Puebla, Pue., México.
Correo electrónico: mmorin@ece.buap.mx / lucio_y6@hotmail.com / jmgutierrez@ece.buap.mx

Resumen

Se plantea el problema de encontrar un control óptimo lineal para la estabilización de trayectorias en un robot móvil de tipo (2,0), la programación dinámica es el fundamento para la síntesis del control. Se obtiene las ecuaciones de movimiento no lineales del robot móvil, y posteriormente para una trayectoria deseada se obtienen las ecuaciones lineales. En la síntesis del control óptimo, es importante la determinación de una matriz, llamada solución de la ecuación matricial diferencial de Riccati. En este trabajo, se diseña un control óptimo en un tiempo finito, para un sistema lineal variante en el tiempo, cuando se considera una trayectoria de tipo circular para el robot móvil. Las matrices de peso del indicador de desempeño se seleccionan para mejorar la calidad de estabilización. Se presentan gráficas del comportamiento obtenido para cada uno de los estados del sistema linealizado.

Palabras clave: Robot móvil, control óptimo, programación dinámica, ecuación matricial de Riccati.

1. Introducción

Un robot móvil es una máquina autónoma capaz de moverse en un ambiente dado, utilizando como herramienta alguna configuración mecánica que permita algún tipo de desplazamiento, combinado con algunos componentes computacionales. De acuerdo a su forma de locomoción se clasifican en: robots móviles con locomoción mediante orugas, mediante patas y mediante ruedas. Aunque la mayoría de los robots móviles actualmente son experimentales, ya están empezando a desarrollarse para fines industriales; las cuales, entre otras características,

pueden ser inhóspitas, peligrosas o inaccesibles para seres humanos.

El caso más simple de robots móviles son los robots con ruedas; estos robots constan de una o más ruedas de tracción, tienen ruedas pasivas opcionales, y posiblemente ruedas de dirección. Considerando físicamente a un robot móvil como un conjunto de varios cuerpos sólidos con diferentes grados de movilidad, un robot móvil puede constar de 5 grados de libertad como en este caso; sin embargo, los robots móviles propulsados por ruedas a su vez se clasifican de acuerdo al número y al tipo de grados de libertad. Los grados de libertad considerados en robótica móvil son de dos tipos, de movilidad y de direccionabilidad. El grado de movilidad es un grado de libertad asociado a una variable de velocidad del robot y el grado de direccionabilidad es un grado de libertad asociado a una variable de dirección del robot. La configuración del robot móvil que se utilizará a lo largo de este trabajo, es el más comúnmente usado y es llamado "control diferencial"; esta configuración consta dos ruedas para tracción y dirección, y una rueda pasiva para estabilidad de la plataforma del robot, con lo anterior, se puede decir que se trata de un robot móvil de tipo (2,0). El diseño del control diferencial tiene dos motores montados en posiciones fijas al lado izquierdo y derecho de el robot, independientemente conducen una rueda cada uno [1].

A causa de que se adiciona la complejidad del control para la coordinación del movimiento del robot, a la complejidad de una posible trayectoria en un ambiente posiblemente hostil, es importante la elección de un control que pueda minimizar los tiempos de estabilización a los posibles cambios de trayectoria que puede presentar el robot al recorrer el entorno dado.

En la literatura, el estudio y diseño de los sistemas de control para los robots móviles es muy amplio, así como también la cantidad de algoritmos de control con los que se puede encontrar una aplicación interesante. Aunque el robot móvil es un sistema con movimientos físicamente simples, matemáticamente no lo es, debido a que su modelo dinámico es no lineal. La aplicación de algoritmos de control para un robot móvil es basta, pasando desde algoritmos clásicos de control como en [2] donde se plantea un control PID y de linealización retroalimentada para el control de la parte dinámica (que involucra a la velocidad de los motores) y la parte cinemática (que involucra a la trayectoria deseada) respectivamente, hasta controles de tipo Difuso como en [3] donde el control se realiza en base a conjuntos de decisión y de respuesta, cabe mencionar que para este caso solo se utiliza el modelo cinemático del robot móvil. Trabajos más recientes como [4] presenta un algoritmo de control para un robot móvil, basado en información visual para la estabilización del sistema. En [5] se presenta el modelo matemático del robot móvil en un sistema de referencia polar de 2 dimensiones, planteando el problema de un regulador o algoritmo de control basado en los teoremas de estabilidad de Lyapunov. En materia de control óptimo para robots móviles, en [6] se plantea el problema de encontrar esta ley de control considerando el modelo matemático a partir del error de orientación y de posición para una trayectoria deseada obteniendo una ecuación lineal de cuatro variables de estado, además haciendo una transformación sobre los valores característicos se obtiene un segundo sistema de dos variables de estado las cuales representa los modos lentos del sistema, el control óptimo es calculado solo para este segundo sistema.

2. Establecimiento del Problema

Considerando el siguiente proceso controlable que representa las ecuaciones dinámicas del robot móvil

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, u), \\ u(\cdot) &\in U = \{u : u(t) \in \Omega \subseteq \mathfrak{R}^r\}; \end{aligned} \quad (1)$$

donde $y \in \mathfrak{R}^n$ contiene los estado del sistema, $u \in \mathfrak{R}^m$ representa los controles de entrada. Las ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan las desviaciones $x(t) = \tilde{y}(t) = y(t) - y^d(t)$ para algún movimiento alrededor de alguna trayectoria deseada $y^d(t)$ y un control deseado $u^d(t) \in [t_0, t_1]$ pueden escribirse como:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\Delta u; \quad (2)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f[y^d(t), u^d(t)]}{\partial y}, B(t) = \frac{\partial f[y^d(t), u^d(t)]}{\partial u},$$

y considerando también el criterio de desempeño

$$\int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T G(t)u(t)] dt + x^T(t_1)Sx(t_1), \quad (3)$$

donde S y Q son matrices simétricas definidas no negativas ($S = S^T \geq 0$; $Q(t) = Q(t)^T \geq 0$); y $G(t)$ es una matriz simétrica definida positiva ($G(t) = G(t)^T > 0$) para $t_0 \leq t \leq t_1$. Entonces surge el problema de determinar un vector de entrada $\Delta u(t)$ para la trayectoria deseada, donde $t_0 \leq t \leq t_1$, tal que minimice el criterio de desempeño (3) [8].

3. Ecuaciones de Movimiento del Robot Móvil

El robot móvil utilizado es de tipo control diferencial, consta de dos ruedas activas para tracción y dirección, y una rueda pasiva (ver fig. 1).

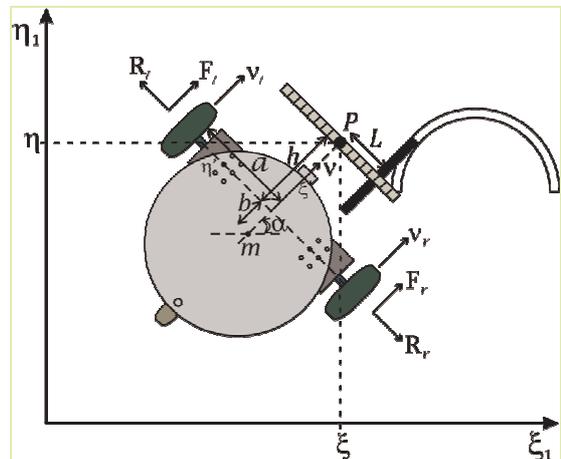


Figura 1. Diagrama físico del Robot Móvil.

Considerando que el robot sólo presenta movimientos planares traslacionales y rotacionales, y que no presenta ningún tipo de deslizamientos lo que lleva a las restricciones no holonómicas (las velocidades de las ruedas activas deben tener la dirección P_ξ); se obtienen utilizando principios básicos de la mecánica, las siguientes ecuaciones que

describen la cinemática del robot móvil dentro del marco de referencia fijo ξ_1, η_1 :

$$\dot{\xi} = v \cos(\alpha) - h\omega \sin(\alpha), \quad (4)$$

$$\dot{\eta} = v \sin(\alpha) + h\omega \cos(\alpha), \quad (5)$$

$$\dot{\alpha} = \omega. \quad (6)$$

Utilizando el principio del equilibrio dinámico de D'Alembert [7], y no considerando las fuerzas reactivas \bar{R}_r y \bar{R}_l , se obtienen las ecuaciones dinámicas que involucran las fuerzas de empuje \bar{F}_r y \bar{F}_l :

$$m(\dot{v} + b\omega^2) = F_l + F_r, \quad (7)$$

$$\tilde{J}\dot{\omega} - mbv\omega = (F_r - F_l)a. \quad (8)$$

Es necesario además, asociar las fuerzas F_r y F_l a las coordenadas φ_r y φ_l que determinan el giro de cada uno de los motores del robot móvil; para esto, se sabe que el torque o momento de un motor está dado por

$$\tau = F\rho; \quad (9)$$

donde τ y F son el torque y la fuerza aplicadas por el motor y ρ es el radio de la rueda acoplada al motor. Es necesario también, un modelo matemático que describa el movimiento del motor, para esto el modelo más simple conocido para un motor de DC es:

$$\tau = \chi V - \sigma\dot{\varphi}; \quad (10)$$

donde τ es el torque del motor (Nm); V es el voltaje aplicado a las terminales del motor (V); $\dot{\varphi}$ es la velocidad angular (rad/s); χ es la fricción viscosa; y σ es la fuerza contra-electromotriz del motor [10]. Considerando las expresiones para la velocidad angular de cada una de las ruedas

$$\dot{\varphi}_r = \frac{v_r}{\rho} = \frac{v + a\omega}{\rho}, \quad (11)$$

$$\dot{\varphi}_l = \frac{v_l}{\rho} = \frac{v - a\omega}{\rho}; \quad (12)$$

y considerando las ecuaciones (9) y (10) se pueden obtener una expresión de fuerza asociada a las ruedas derecha e izquierda

$$F_r = \frac{\chi V_r \rho - \sigma(v + a\omega)}{\rho^2}, \quad (13)$$

$$F_l = \frac{\chi V_l \rho - \sigma(v - a\omega)}{\rho^2}; \quad (14)$$

sustituyendo las expresiones (13) y (14) en las ecuaciones de movimiento (7) y (8), se tiene

$$m\dot{v} + mb\omega^2 = \frac{\chi}{\rho}(V_r + V_l) - \frac{2\sigma v}{\rho^2}, \quad (15)$$

$$\tilde{J}\dot{\omega} - mbv\omega = \frac{a\chi}{\rho}(V_r - V_l) - \frac{2\sigma a^2 \omega}{\rho^2}. \quad (16)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (4), (5), (6), (15) y (16)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v \cos(\alpha) - h\omega \sin(\alpha), \\ \dot{\eta} &= v \sin(\alpha) + h\omega \cos(\alpha), \\ \dot{\alpha} &= \omega, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{v} = -b\omega^2 - \frac{2\sigma v}{m\rho^2} + \frac{\chi}{m\rho}(V_r + V_l),$$

$$\dot{\omega} = \frac{mbv\omega}{\tilde{J}} - \frac{2\sigma a^2 \omega}{\tilde{J}\rho^2} + \frac{a\chi}{\tilde{J}\rho}(V_r - V_l).$$

describen el movimiento del robot móvil.

4. Trayectorias Deseadas y Ecuaciones Lineales

Ya que cualquier trayectoria puede ser aproximada mediante segmentos rectos y circulares; se pueden obtener las trayectorias deseadas o programadas que el robot móvil puede realizar. Considerando que el robot presenta movimientos horizontales y verticales a través de movimientos paralelos a los ejes $0, \xi$ y $0, \eta$ tenemos en la tabla 1 las siguientes trayectorias deseadas (ver figura 2).

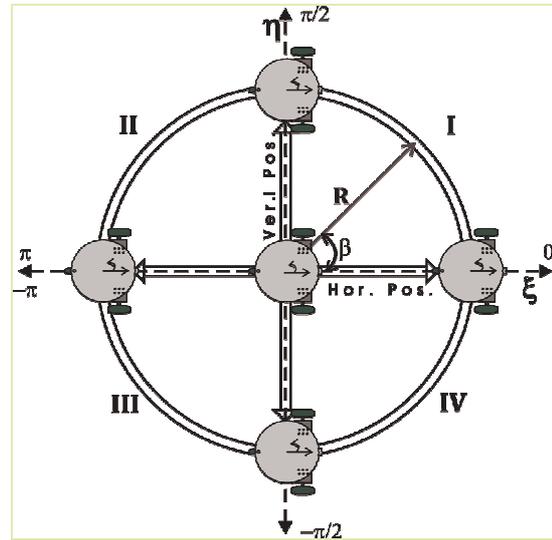


Fig. 2. Trayectorias Rectas y Circulares del robot móvil.

Para obtener los desplazamientos circulares se supondrá que el estado inicial o posición de casa del robot es paralelo al eje ξ y que el movimiento se describe sobre un círculo de radio R , el cual está

seccionado en cuatro cuadrantes (ver figura 2) y tomando en cuenta el sentido en que se recorre, las trayectorias se muestran en la tabla 2.

Trayectoria	ξ^d	η^d	α^d	v^d	ω^d
Línea Horizontal sentido Positivo	$\xi_0 + v_0 t$	0	0	v_0	0
Línea Horizontal sentido Negativo	$\xi_0 + v_0 t$	0	π	v_0	0
Línea Vertical sentido Positivo	0	$\eta_0 + v_0 t$	$\frac{\pi}{2}$	v_0	0
Línea Vertical sentido Negativo	0	$\eta_0 + v_0 t$	$-\frac{\pi}{2}$	v_0	0

Tabla 1. Trayectorias deseadas Rectas.

Siendo las ecuaciones de movimiento del robot móvil el conjunto de ecuaciones (17), se pueden aproximar linealmente a vecindades cercanas a las trayectorias deseadas utilizando la expresión (2). Siendo la trayectoria deseada y^d un movimiento en línea horizontal en sentido positivo (tabla 1, número 1), se tienen las ecuaciones lineales (18). Si la trayectoria deseada y^d alguno de los movimientos circulares de la tabla 2, se pueden obtener las ecuaciones lineales del sistema (19) que dependen de α^d .

Trayectoria	ξ^d	η^d	α^d	v^d	ω^d
Cuadrante I (sentido reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$-\omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante I (contra reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$\frac{\pi}{2} + \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante II (sentido reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$\frac{\pi}{2} - \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante II (contra reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$\pi + \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante III (sentido reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$\pi - \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante III (contra reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$-\frac{\pi}{2} + \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante IV (sentido reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$-\frac{\pi}{2} - \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
Cuadrante IV (contra reloj)	$R \cos(\beta)$	$R \sin(\beta)$	$\omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0

Tabla 2. Trayectorias deseadas Circulares.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \tilde{v}, \\ \dot{\eta} &= -v_0 \tilde{\alpha} + h \tilde{\omega}, \\ \dot{\alpha} &= \tilde{\omega}\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\frac{2\sigma}{m\rho^2} \tilde{v} + \frac{\chi}{m\rho} u_1, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= \frac{mbv_0}{\tilde{J}} \tilde{\omega} - \frac{2\sigma a^2}{\tilde{J}\rho^2} \tilde{\omega} + \frac{a\chi}{\tilde{J}\rho} u_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -(\omega_0 R \sin(\alpha^d) + h\omega_0 \cos(\alpha^d)) \tilde{\alpha} + \\ &\quad \tilde{v} \cos(\alpha^d) - h\tilde{\omega} \sin(\alpha^d), \\ \dot{\eta} &= (\omega_0 R \cos(\alpha^d) - h\omega_0 \sin(\alpha^d)) \tilde{\alpha} + \\ &\quad \tilde{v} \sin(\alpha^d) - h\tilde{\omega} \cos(\alpha^d), \\ \dot{\alpha} &= \tilde{\omega}\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\frac{2\sigma}{\rho^2 m} \tilde{v} - 2b\omega_0 \tilde{\omega} + \frac{\chi}{m\rho} u_1, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= \frac{mb\omega_0}{\tilde{J}} \tilde{v} + \frac{mb\omega_0 R}{\tilde{J}} \tilde{\omega} - \frac{2\sigma a^2}{\tilde{J}\rho^2} \tilde{\omega} + \frac{a\chi}{\tilde{J}\rho} u_2.\end{aligned}$$

5. Deducción del Control Óptimo

Aplicando la **Programación Dinámica** mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman [9], se obtiene la siguiente entrada de control llamado **control óptimo** que minimiza el índice de desempeño (3) sujeto a la ecuación lineal de estado (2)

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = G^{-1} B^T P(t); \quad (20)$$

donde esta ley de control resuelve el problema de estabilización; además $P(t) \geq 0$ es la solución de la ecuación Diferencial Matricial de Riccati

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P(t)}{\partial t} &= Q - P(t) B G^{-1} B^T P(t) + \\ &\quad P(t) A + A^T P(t),\end{aligned}\quad (21)$$

$$\text{con : } P(t_1) = 0,$$

que también es llamada **solución de estabilización**; y la matriz K definida en (20) es la matriz de ganancia del control óptimo o la matriz de estabilización óptima. Con una apropiada selección de las matrices de peso Q y R es posible tener un comportamiento apropiado del sistema en lazo cerrado, ya que las propiedades dinámicas y magnitudes de los estados son de mucha influencia. Se puede verificar el comportamiento con la ecuación lineal de control en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (22)$$

6. Solución y Resultados

El valor de los parámetros necesarios para obtener los resultados se presenta en la tabla 3.

Variable	Valor	Descripción
v_0	1,5	Velocidad deseada [m/s]
ω_0	0,5	Velocidad angular deseada [rad/s]
a	0,40	Distancia entre las ruedas [m]
b	0,40	Distancia del centro de masa al eje de las ruedas [m]
h	0,10	Distancia del eje de las ruedas al arreglo de sensores [m]
m	4,5	Masa del Robot Móvil [Kg]
ρ	0,08	Radio de las Ruedas [m]
R	0,35	Radio del Circulo [m]
χ	0,01	Fricción viscosa del motor
σ	0,009	Fuerza contra-electromotriz del motor
\bar{J}	0,2868	Momento de inercia del Robot Móvil

Tabla 3. Valor de los parámetros del Robot Móvil.

El algoritmo de solución para la obtención del control óptimo para las trayectorias del robot móvil es el siguiente:

1. Obtener el sistema lineal (2) alrededor de alguna trayectoria deseada (tablas 1 y 2).
2. Verificar si el par de matrices (A, B) del sistema lineal (2) es completamente controlable, si no, no es posible obtener el control óptimo.
3. Desarrollo y solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati con condiciones finales (21), una vez que se han escogido valores adecuados para las matrices de peso Q y G . Para la solución de la ecuación diferencial de Riccati se realiza un cambio de variable para el tiempo ($\tau = t_f - t$), para convertir este problema en uno de condiciones iniciales.
4. Obtener mediante polinomios una aproximación a cada una de las curvas de solución de la matriz diferencial de Riccati; posteriormente se hace la inversión de estas curvas en el tiempo para obtener el resultado a condiciones finales buscado.
5. Obtener el control óptimo (20).
6. Verificar el comportamiento del control óptimo diseñado mediante la ecuación de del sistema en lazo cerrado (22).

A continuación, se presenta el diseño de un control óptimo, para una trayectoria correspondiente a

un segmento de círculo en el cuadrante IV para $\beta \in (-\pi/2, 0)$ en sentido de las manecillas del reloj ($\alpha^d = \omega_0 t$). En esta situación las matrices $A(t)$ y B son:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,175 \sin(0,5t) - 0,05 \cos(0,5t) & \cos(0,5t) & -0,1 \sin(0,5t) \\ 0 & 0 & 0,175 \cos(0,5t) - 0,05 \sin(0,5t) & \sin(0,5t) & 0,1 \cos(0,5t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,625 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 3,14 & -0,471 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0278 & 0 \\ 0 & 0,1743 \end{pmatrix}$$

las cuales hacen que el sistema lineal sea variante en el tiempo, ya que la matriz de parámetros A depende del tiempo.

Para asegurar que existe una ley de control óptima para este sistema, es necesario afirmar que el sistema lineal variante en el tiempo es completamente controlable; para esto se utilizará el siguiente criterio.

Proposición 1. [11] Asumiendo que las funciones matriciales $A(t)$, $B(t)$ son analíticas en R^+ . El sistema $[A(t), B(t)]$ es completamente controlable en algún tiempo finito si

$$\text{rango}[M_1(t_0), M_2(t_0), \dots, M_k(t_0)] = n \quad (27)$$

$$\exists t_0 > 0.$$

donde

$$M_1(t) = B(t),$$

$$M_k(t) = -A(t) + \frac{d}{dt} M_{k-1}(t), \quad k=2, \dots, n-1.$$

En la solución y diseño de un control óptimo, la matriz K , se calcula con una apropiada selección de las matrices de peso Q y G . Cuando se trabaja con sistemas grandes es común elegir a estas matrices como diagonales. Se tomará la matriz de peso $G^{2 \times 2}$ como una matriz identidad, con lo cual se asigna igual peso a las señales de control y se logra que cada una de ellas actúe en forma independiente. Los resultados de la simulación de cada variable de estado del sistema linealizado para el procedimiento descrito anteriormente, se muestran en la figura 4, obteniendo la siguiente matriz de peso Q que mejora la estabilidad del sistema; cabe mencionar que esta matriz no es única. Las condiciones iniciales para la simulación del sistema en lazo cerrado son $x(0) = [-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]$; esta simulación se realizó en un intervalo de tiempo de 0 a 20seg. En la figura 3,

se puede observar que el error de cada uno de los estados del sistema es llevado a cero; esto indica que el robot móvil parte de una posición arbitraria y posteriormente se estabiliza en la trayectoria deseada.

$$Q = \begin{pmatrix} 9,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 900 \end{pmatrix}$$

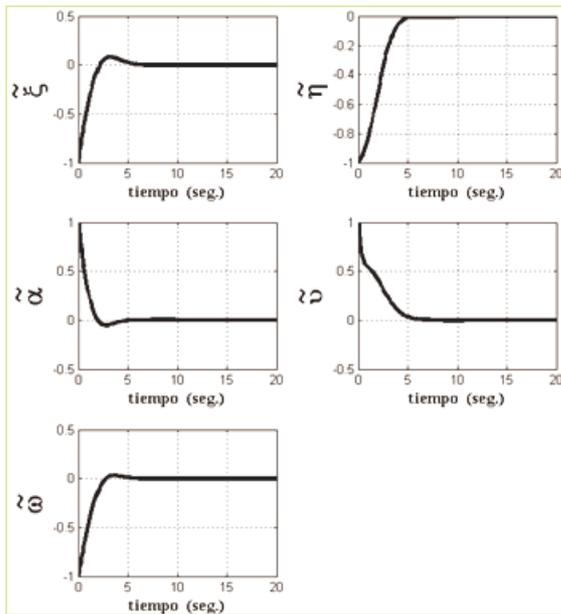


Fig. 3. Simulación del sistema en lazo cerrado con matriz de peso Q determinada a prueba y error.

7. Conclusiones

Se estudió el modelo dinámico del robot móvil, el cual consta de 5 ecuaciones de primer orden; se consideran la cinemática y la dinámica del robot, esta última resulta de considerar el movimiento rotacional de las ruedas del robot móvil. Mediante la programación dinámica se sintetizó la ley de control óptimo para una trayectoria circular del robot móvil. La dinámica del control óptimo se obtuvo solucionando una ecuación diferencial matricial de Riccati, elaborando un programa en el software MATLAB que da la solución a dicha ecuación matricial, que complementada con una buena sintonización de las matrices de peso proporciona un buen desempeño de la ley de control.

Referencias

- [1] Canudas C., Siciliano B., Bastin G., Brogliato B., Campion G., D'Andrea-Novel B., De Luca A., Khalil W., Lozano R., Ortega R., Samson C. y Tomei P., "Theory of Robot Control", 1996, London.
- [2] Aranda E., Salgado T., Velasco M., "Control no Lineal Discontinuo de un Robot Móvil", Computación y Sistemas, Número Especial, 2002, págs. 042-049.
- [3] Carrasco R., Cipriano A., "Sistema de Guiado para un Robot Móvil basado en Lógica Difusa", XV Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático, 2002.
- [4] Tsakiris D. P., Samson C., Rives P., "Vision-Based Time-Varying Mobile Robot Control", Dans Final European Robotics Network (ERNET) Workshop, Germany, 1996.
- [5] Wang T. Y., Tsai C. C., Pang J. L., "Nonlinear Regulation and Path Tracking of a Wheeled Mobile Robot in Polar Coordinates", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 28, No. 6, 2005, págs. 925-933.
- [6] Hemami A., Mehrabi M. G., Cheng R. M. H., "Synthesis of an Optimal Control Law for Path Tracking in Mobile Robots", Automatica, Vol. 28, No. 2, 1992, págs. 383-387.
- [7] Beer F., Johnston R., Clausen W., "Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica", McGraw Hill, 8º Ed., 2007.
- [8] Kwakernaak H., Sivan R., "Linear Optimal Control Systems", Wiley-Interscience, 1972, págs. 24-65.
- [9] Kirk D. E., "Optimal Control Theory", Prentice Hall, 1970.
- [10] Cetinkunt S., "Mechatronics", John Wiley & SONS INC., 2007.
- [11] Niamsup P., Phat V. N., "H ∞ control problem of linear time-varying systems via controllability approach", Vietnam Journal of Mathematics, 2007.