

# Uso del Pendubot como Herramienta Pedagógica para la Enseñanza de la Teoría del Control Automático

Santos Luna Joaquín<sup>1</sup>, Méndez Navarro Alejandro<sup>2</sup>, Osorio Mirón Anselmo<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad Veracruzana, Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Av. 16 de septiembre No. 100, Cd. Mendoza, Ver. MEXICO, CP. 94340  
[joasantos@uv.mx](mailto:joasantos@uv.mx)

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Zamora  
Km. 7 Carretera Zamora-La Piedad, Zamora, Mich. MEXICO, CP. 59720

<sup>3</sup>Universidad Veracruzana, Facultad de Ciencias Químicas  
Av. Oriente 6, No. 1009, Veracruz, MEXICO, CP. 94340.

## Resumen

*El pendubot (conjunción de las palabras péndulo y robot) es una plataforma mecatrónica en la que se conjuga el análisis, diseño y estudio del doble péndulo invertido, aplicando conocimientos de diversas áreas de la matemática y la ingeniería. El pendubot consta de dos eslabones acoplados en un punto común. El extremo de uno de ellos se encuentra libre mientras que el otro está sujeto a un torque.*

*En este artículo se muestra que el análisis y estudio del pendubot puede ser una herramienta importante para explicar diversos y variados conceptos que se tratan en la teoría del control automático, como la modelación matemática, la linealización de sistemas no-lineales, las técnicas de estabilización, la sintonización de controladores, etc. A su vez, estos conceptos involucran conceptos básicos de álgebra y álgebra lineal, de geometría y geometría analítica, de cálculo diferencial e integral, etc. Lo que hace al pendubot una herramienta poderosa para mostrar la aplicación de las matemáticas a un problema típico de ingeniería. En cada una de las etapas del análisis, se hace énfasis acerca del concepto del área del control aplicada.*

*El artículo está dividido como sigue: en la Sección 1 se hace una breve introducción acerca del pendubot. La Sección 2 muestra los detalles técnicos de la derivación del modelo matemático del pendubot utilizado en este artículo. Las Secciones 3,4 y 5 tratan sobre la identificación y control del pendubot. En la Sección 5 se presenta un análisis de resultados sobre aprovechamiento escolar en dos grupos de alumnos, en uno de los cuales se utilizó el pendubot*

*como herramienta pedagógica. El trabajo finaliza con una serie de conclusiones y observaciones.*

**Palabras clave:** mecatrónica, control automático, matemáticas aplicadas, péndulo invertido, pendubot

## 1. Introducción

La mayor parte de los procesos y fenómenos físicos que existen en la naturaleza se comportan como sistemas no lineales, es decir, su representación matemática no satisface el principio de superposición. La representación matemática de estos sistemas posee una gran complejidad matemática que los hace difíciles de analizar y estudiar utilizando las herramientas matemáticas que existen actualmente. Contrario a lo anterior, existe una gran cantidad de resultados matemáticos que permiten analizar y estudiar a los sistemas lineales, es por ello que al analizar un sistema no lineal debe considerarse la *linealización* del sistema, es decir, transformar el sistema original en un sistema lineal. El nuevo sistema actuara de manera similar al sistema original aunque solo en un punto determinado y bajo ciertas condiciones pre-establecidas. En este artículo se hace un breve análisis de un sistema altamente lineal como lo es el doble péndulo invertido o pendubot, con su linealización posible.

El Pendubot consiste en dos eslabones acoplados en un punto en común. El extremo de uno de ellos se encuentra libre mientras que el otro está sujeto a un torque. Tiene sus orígenes en el año 1991 en el trabajo desarrollado por D. J. Block [1]. Este prototipo complementa el desarrollo de otros anteriores: el Acrobot [2] que es un robot planar

sobreactuado de dos eslabones y el péndulo invertido Furuta [3] que consiste en un brazo que rota en el plano horizontal con un péndulo acoplado al final del brazo.

El péndulo invertido ha demostrado ser una herramienta importante para comprender el comportamiento de algunos procesos físicos. Por ejemplo, en [4] se analiza el equilibrio del cuerpo humano considerando a éste como un péndulo invertido. En [5] se analiza el problema de estabilización de un cohete lanzado al espacio en el cual el cohete se interpreta como un péndulo invertido equilibrado al final a través del empuje del motor.

El Pendubot utilizado en este trabajo de investigación, ver figura N° 1, es una de las cuatro partes que conforman el Kit Mecatrónico de Control<sup>1</sup> de la marca Quanser (bajo licencia de Mechatronic Systems Inc.) que fue adquirido por el Laboratorio de Control e Instrumentación de la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica de la Universidad Veracruzana de Ciudad Mendoza, Ver.

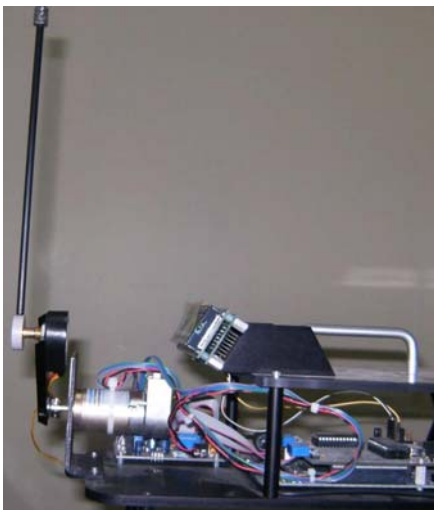


Fig. 1. El pendubot.

A continuación se presenta el análisis y estudio del pendubot dividido en cuatro etapas. En cada una de ellas se hace un énfasis particular sobre la clase de conocimiento aplicado.

## 2. Modelación matemática

La modelación matemática es una parte importante dentro de la teoría del control automático,

<sup>1</sup> Equipo adquirido por el Programa Integral de Fortalecimiento Institucional PIFI 3.3.

ya que permite describir, de manera aproximada y bajo ciertas condiciones, el comportamiento dinámico de un determinado fenómeno o proceso para así poder controlar un determinado conjunto de variables de interés. Una de las metodologías para modelar son las ecuaciones de Euler-Lagrange, ver [6], aunque existen otros métodos como el de Newton-Euler. A continuación se presentará el desarrollo del modelo matemático del pendubot con base al primer método citado.

El diagrama esquemático del sistema físico del pendubot puede verse en la figura N° 2.

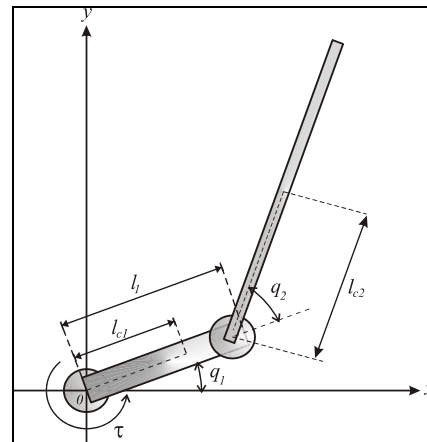


Fig. 2. Diagrama esquemático del pendubot.

Las variables y parámetros que describen al sistema son:

- $\tau$  Torque aplicado en el origen de coordenadas
- $m_1$  Masa eslabón 1
- $m_2$  Masa eslabón 2
- $l_1$  Longitud eslabón 1
- $l_2$  Longitud eslabón 2
- $G_1$  Centro de gravedad eslabón 1
- $G_2$  Centro de gravedad eslabón 2
- $lc_1$  Distancia al centroide eslabón 1
- $lc_2$  Distancia al centroide eslabón 2
- $q_1$  Ángulo de rotación eslabón 1
- $q_2$  Ángulo de rotación eslabón 2
- $I_1$  Momento de inercia eslabón 1
- $I_2$  Momento de inercia eslabón 2
- $g$  Aceleración de la gravedad

Las ecuaciones de movimiento del pendubot pueden ser obtenidas aplicando la metodología de las ecuaciones de Euler-Lagrange, con base al diagrama

mostrado en la figura N° 2. Estas ecuaciones en forma matricial están descritas por:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ 0]^T$  es el vector del torque aplicado a los eslabones y  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$  es el vector de los ángulos que forman los eslabones con los ejes de referencia. Las matrices  $D(\mathbf{q})$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $g(\mathbf{q})$  se definen de la siguiente manera:

$$D(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)$$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\phi_2 = m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser re-parametrizadas para reducir el número de variables y obtener un modelo matemático más sencillo. De este modo, son introducidos cinco nuevos parámetros definidos como:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 &= m_2 l_{c2} \end{aligned} \quad (4)$$

Estos cinco parámetros son suficientes para diseñar un control que desprecie la fricción del sistema. Sustituyendo estos parámetros en las

ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes matrices:

$$D(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 - \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Ahora bien, multiplicando la ecuación (1) por  $D^{-1}(\mathbf{q})$  se obtienen las ecuaciones de estado del sistema no lineal del pendubot:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\ &= D(\mathbf{q})^{-1} \boldsymbol{\tau} - D(\mathbf{q})^{-1} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - D(\mathbf{q})^{-1} g(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (8)$$

El vector de estados  $\ddot{\mathbf{q}}$  de la ecuación anterior representan las posiciones angulares de cada uno de los eslabones del pendubot. Estos parámetros dependen de los parámetros definidos en la expresión (4) y deben ser calculados a través de un algoritmo de identificación.

### 3. Identificación del sistema

La identificación de sistemas es la estimación de los parámetros de los modelos que reproduzcan el comportamiento entrada salida de un sistema cuyo modelo sólo es parcialmente conocido.

En el caso del pendubot, la identificación de sus parámetros se hace a través de tres métodos: a) Modelo sólido en CAD, b) Método de Ecuación de energía y c) Método de Optimización. Los resultados obtenidos son comparados y dado que existen pequeñas variaciones entre los resultados obtenidos el autor escogió los parámetros obtenidos por el método de ecuación de energía.

Aunque la identificación del sistema no está contemplada en este artículo, en la referencia [7] el lector podrá encontrar la metodología empleada.

#### 4. Puntos de equilibrio

Un concepto sin duda importante dentro de la teoría del control es la estabilidad de sistemas. Para explicar este concepto los puntos de equilibrio son de especial ayuda.

Con base a la figura N° 2 del pendubot se puede observar que existen un punto estable de equilibrio y dos puntos inestables de equilibrio. La posición de equilibrio corresponde al estado del sistema inicial para el cual no se debe ejercer ningún torque sobre los dos péndulos dado que el sistema se encuentra en su estado de reposo, es decir:

$$q_1 = -\frac{\pi}{2}, q_2 = 0.$$

Para las posiciones inestables donde el pendubot puede estar en equilibrio se conocen como posición media (mid position) que es el caso cuando

$$q_1 = -\frac{\pi}{2}, q_2 = \pi \text{ y posición superior (top position)}$$

$$\text{que es cuando } q_1 = \pm \frac{\pi}{2}, q_2 = 0.$$

Es importante mencionar que para cada una de las posiciones inestables se desarrollará una estrategia de control que permita llevar al sistema a la posición deseada.

#### 5. Controlador del pendubot

Un controlador es un mecanismo que hace que ciertas variables físicas de un sistema se comporten de una manera prescrita a pesar de la presencia de incertidumbres o disturbios.

Para el caso del pendubot, el propósito del controlador es llevar y mantener a los dos eslabones de la posición de equilibrio estable a una posición de equilibrio inestable, donde el sistema se balancea. La estrategia de control está dividida en dos partes. La primera emplea un controlador que se encarga de llevar a los dos eslabones cerca de la posición deseada mediante la oscilación del eslabón uno (swing up ó giro) aplicando el *Método de Linealización Parcial por Retroalimentación*. La segunda estrategia mantiene estable el sistema en la posición de equilibrio (balancing o balanceo) empleando una técnica lineal para la retroalimentación óptima del estado del sistema calculado en la ecuación (4).

#### 5.1 Control de giro

Las ecuaciones del movimiento dadas por (8) son no lineales y describen por completo la dinámica del sistema. Dado que el eslabón dos es independiente del punto en donde se aplica la acción de control (inactiva), solo se puede linealizar el grado de libertad activo del sistema (eslabón uno) [7]. El método de linealización mas adecuado para desarrollar este controlador es el de Linealización Parcial por Realimentación planteado en [6], dado que este método necesita conocer la posición de ambos eslabones y toma en cuenta los efectos no lineales del acoplamiento [8].

Para el pendubot escogemos un controlador PD con aceleración feedforward:

$$v_1 = \ddot{q}_1^d + K_d(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + K_p(q_1^d - q_1).$$

En la expresión anterior,  $q_1$  representa la posición angular del eslabón dos y  $q_1^d$  es la posición en la cual se quiere ubicar el sistema. Los parámetros  $K_p$  y  $K_D$  son las ganancias del controlador que se deben ajustar para generar la trayectoria deseada.

En los experimentos realizados en simulink, se requirió que el péndulo se desplace a la posición superior (top) empleando para ello un impulso de magnitud  $q_1^d = \pm \frac{\pi}{2}$  para la trayectoria de referencia.

Esta trayectoria funcionó muy bien en la simulación pero no con el sistema físico real, razón por la que fue necesario añadir un pequeño lazo para enviar en la dirección negativa por un periodo corto de tiempo añadiendo energía potencial al sistema. Esta energía permitirá al motor excitar la dinámica interna y consecuentemente girar ambos eslabones a su posición superior. La trayectoria aplicada es:

$$q_1 = 1.4 \text{sen}(5t) - \frac{\pi}{2}, \quad t < \frac{2\pi}{5},$$

$$q_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad t > \frac{2\pi}{5}.$$

#### 5.2 Control de balanceo

Para diseñar un controlador del balanceo se deben linealizar las ecuaciones no lineales del pendubot (8), y entonces diseñar un controlador de retroalimentación de estado completo con el modelo lineal. Cada punto de equilibrio define un sistema

linealizado distinto. Esto significa que se necesitarán ganancias de control diferentes para cada punto de equilibrio para mejores resultados en el balanceo del pendubot. Las posiciones inestables de equilibrio del sistema, mid position cuando  $q_1 = -\frac{\pi}{2}, q_2 = \pi$  y posición superior (top position) cuando  $q_1 = \pm\frac{\pi}{2}, q_2 = 0$ .

Usando estos valores de puntos de equilibrio y los parámetros identificados por el método de la energía, los modelos lineales para la posición superior y media son como sigue:

Posición mid:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 128.0013 & 0 & -29.4233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -132.4140 & 0 & 100.2173 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.9549 \\ 0 \\ -29.3596 \end{bmatrix}$$

Posición top:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -128.0013 & 0 & 29.4233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 123.5885 & 0 & 41.3707 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 16.4058 \\ 0 \\ -8.5682 \end{bmatrix}$$

## 6. Resultados obtenidos

Para medir la efectividad del uso del pendubot en la enseñanza de la teoría del control automático, se escogieron a dos grupos de 30 alumnos cada uno.

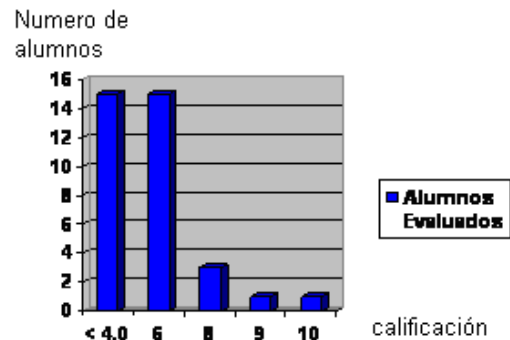


Fig. 3. Gráfica de barras mostrando las calificaciones del Grupo A

En el Grupo A se aplicó la enseñanza tradicional a base de notas, ejercicios y ejemplos teóricos. En el Grupo B, además de lo aplicado en el Grupo A, se aplicaron diversas dinámicas de experimentación con el pendubot. Es decir, aquellos conceptos como los mencionados en las secciones de este artículo y que se podrían explicar mejor y directamente con el uso del pendubot. La medición de la efectividad del uso del pendubot se midió con base a las calificaciones obtenidas por los estudiantes durante un semestre.

Como puede observarse en la gráfica de la figura N° 3, el número de estudiantes con calificación reprobatoria de 4 en el Grupo A es de 15, es decir el 50 %, mientras que la cantidad de alumnos con calificación satisfactoria es la otra mitad. Al realizar la evaluación con el Grupo B, los resultados mostrados en la figura N° 4 nos indican que la cantidad de alumnos reprobados disminuyó hasta el 13 %.

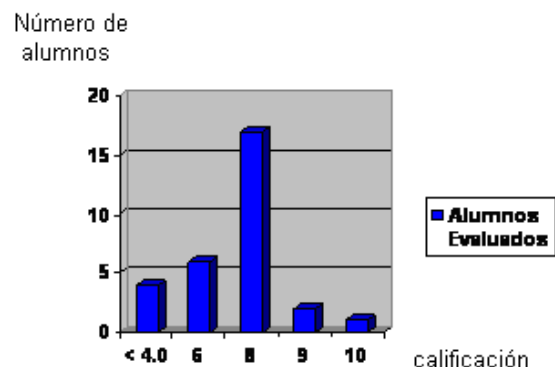


Fig. 4. Gráfica de barras mostrando las calificaciones del Grupo B

## 7. Conclusiones

Con base al análisis que se hizo del pendubot, su relación con concepto matemáticos importantes de la Teoría del Control Automático y la aplicación en la clarificación de tales conceptos en el aula escolar, podemos concluir que el sistema es una plataforma altamente auxiliar en los cursos de control donde el docente requiere una comprensión y asimilación del conocimiento clara, por parte de los alumnos. Se recomienda entonces que el docente explote todo el potencial de esta plataforma mecatrónica para que el joven estudiante asimile los conceptos vertidos en el a través de la relación de los mismos con un objeto tangible, como lo es el pendubot.

## Referencias

- [1] Block, D.J., “*Mechanical design and control of the Pendubot*”, Thesis, Graduated College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996.
- [2] Bortoff, S. A., “*Pseudolinearization using Spline Funtion with Application to the Acrobot*”, Thesis, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.
- [3] Furuta, K., and Yamakita, M., “*Swing Up Control of Inverted Pendulum*”, In IECON’91, pp. 2193-2198, 1991.
- [4] Stépan G., “*Balancing with reflex delay*”, Mathematical and Computer Modelling, 31, págs 199-205, 2000.
- [5] Isidori Alberto, Nonlinear Control Systems, Springer, 3rd edition, 1995.
- [6] M. Spong, M. Vidyasagar, Robot Dynamics and Control. New York, Wiley, 1989.
- [7] Gautier, M., and Khalil, W., “On the identification of the inertial parameters robots”. In Proceedings of the 27th CDC, pp. 340-345, Mayo, 1994.
- [8] Mechatronics Control Kit Quanser; User’s Manual.