

Pruebas Maximin para la Calidad de Estabilización Robusta

Gutiérrez Arias José Eligio Moisés, Cabrera Martínez Javier, José Fernando Reyes Cortés

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y Blvd. 18 Sur. Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570, México
Teléfono: (222) - 2198878
jmgutierrez@ece.buap.mx / javier_cm4@ece.buap.mx, / freyes@ece.buap.mx

Resumen

Existen situaciones en que se desea estimar la calidad de estabilización de un sistema de control, en las cuales se desconoce como funciona el sistema de dicho control; pero conocemos la entrada y la salida del mismo, estas situaciones permiten considerar los sistemas de pruebas de calidad de la estabilización, como lo son las pruebas maximin. Las estrategias de pruebas maximin es una nueva dirección en la teoría de control óptimo y tienen su aplicación en la práctica de pruebas. Su objetivo es evaluar el desempeño de algoritmos de estabilización desconocidos, así, mediante un sistema de pruebas determinar cuan bueno es dicho algoritmo de control. En el presente trabajo, se evalúa el desempeño que presenta un controlador desconocido que se aplica a un robot móvil, utilizando para ello las pruebas maximin.

Palabras clave: Pruebas maximin, indicador de desempeño, estimación inferior, ecuación de Riccati.

1. Introducción

Hacia 1960 y como respuesta a las nuevas necesidades (plantas con múltiples entradas y salidas, elevada complejidad), surge la teoría moderna de control, la cual está basada en el análisis y la síntesis en el dominio del tiempo empleando variables de estado. Los desarrollos más avanzados están representados por conceptos como el control óptimo, siendo éste, un tópico especial dentro de la disciplina de las ecuaciones diferenciales. Con el desarrollo del principio del máximo por Pontryagin (1958) y el método de la programación dinámica por Bellman (1957), actualmente, la teoría de control óptimo se considera como uno de los elementos de los métodos de optimización.

La idea de control puede ser expresada como el proceso mediante el cual se ejerce una influencia sobre el comportamiento de un objeto para alcanzar un propósito previamente fijado; pero si ahora, se desea lograr tal propósito en un tiempo mínimo o con un mínimo uso de recursos de control, entonces, este es un problema de control óptimo, ya que se quiere minimizar un funcional que depende del estado del sistema y del control, de esta manera, podemos decir que este funcional describe la calidad de estabilización.

En el establecimiento de las pruebas de estabilización en sistemas dinámicos, la solución de un problema del tipo maximin es considerado como el principio de las pruebas. El conocimiento o descripción de un algoritmo de estabilización no es necesario para la realización de un procedimiento de pruebas, sólo se supone el uso de una señal de entrada y salida del algoritmo.

2. Establecimiento de las pruebas maximin

Un sistema dinámico controlable está formado generalmente por cuatro partes como se observa en la fig. 1, éstas actúan de tal forma que se produce un mecanismo de retroalimentación [1].

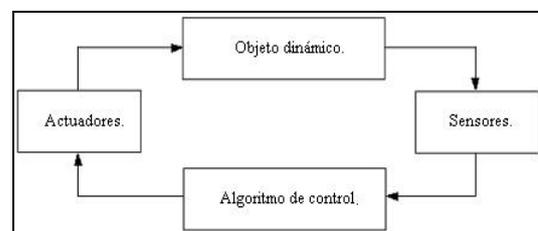


Fig. 1. Diagrama de un sistema dinámico controlable.

Para el establecimiento de las pruebas maximin, consideremos las ecuaciones en desviaciones siguientes del movimiento programado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Cv, & x(t_0) \in X_0 \\ u(\cdot) \in U_0 = \{u(\cdot) \in KC : |u_i(t)| \leq \nu_i, i=1, \dots, r\} \\ v(\cdot) \in V_0 = \{v(\cdot) \in KC : |v_j(t)| \leq \mu_j, j=1, \dots, s\} \end{cases} \quad (1)$$

Donde $x(t)$ es el vector n -dimensional de desviaciones de una trayectoria dada, $v(\cdot)$ es el vector s -dimensional de perturbaciones permanentes, $u(\cdot)$ es el vector r -dimensional de controles estabilizadores, $x(t_0) \in X_0$ es el conjunto de desviaciones iniciales, ν_i y μ_j son parámetros dados que describen los recursos de control y la perturbación permanente. U_0 y V_0 son conjuntos dados en los cuales el constructor trabaja prácticamente.

Suponemos que el sistema (1) es estabilizable y completamente controlable para cualquier $v \equiv const \in V_0$ si el correspondiente algoritmo de estabilización $u(\cdot) \in U_0$ es usado. Suponemos también que la calidad de la estabilización está descrita por el criterio de desempeño cuadrático dado en (2)

$$L(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} (x^T G x + u^T N u) dt + x^T(t_1) S x(t_1) \quad (2)$$

El primer sumando del funcional es una integral que depende de los valores que va tomando $x(t)$ y $u(t)$ a lo largo del horizonte temporal, por lo tanto, valora el comportamiento del sistema a través del tiempo. El segundo sumando valora el estado en que queda el sistema al final del intervalo de tiempo que constituye el horizonte temporal del problema.

Para el establecimiento de las pruebas asumimos que conocemos el sistema dinámico (1) que describe el comportamiento de las desviaciones y el criterio (2), así como los conjuntos U_0 y W_0 . Las matrices G , N y S son constantes y satisfacen que $G \geq 0$, $N > 0$ y $S \geq 0$.

Denotemos a $w = (x(t_0), v) \in W_0$ donde $W_0 = X_0 \times V_0$, formulamos los siguientes problemas de síntesis y análisis de sistemas de control [2]:

a) El problema de estabilización minimax.

$$\inf_{u(\cdot) \in U_0} \sup_{w(\cdot) \in W_0} L(u, w) \quad (3)$$

b) El problema de las pruebas maximin.

$$\sup_{w(\cdot) \in W_0} \inf_{u(\cdot) \in U_0} L(u, w) \quad (4)$$

El problema (4) es considerado como el soporte del procedimiento de pruebas (ver el esquema funcional de la fig. 2).

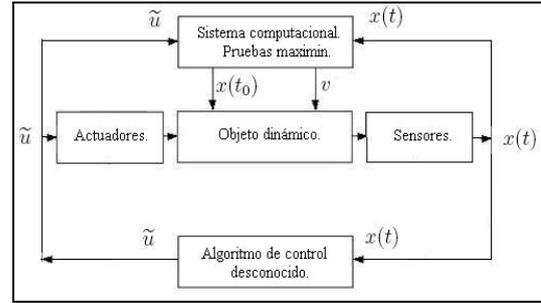


Fig. 2. Esquema Funcional de las Pruebas Maximin.

En el planteamiento general de las pruebas maximin asumimos que el funcional $L(u, w)$ alcanza su máximo y su mínimo. La cadena de desigualdades (5) es muy importante [5].

$$\begin{aligned} L^0 = L(u^0, w^0) &= \max_{w \in W_0} \min_{u \in U_0} L(u, w) \leq \\ &\leq \min_{u \in U_0} \max_{w \in W_0} L(u, w) \leq L(\tilde{u}, w^0) = \tilde{L} \end{aligned} \quad (5)$$

El procedimiento de las pruebas maximin para la calidad de la estabilización robusta está constituido por tres etapas [3]:

En la **primera etapa**, la solución del problema maximin, la estrategia óptima $u^0(x, t)$, la estrategia de las pruebas $w^0(x, u, t)$ (si existe) y el valor del juego dinámico (4) (L^0 es la estimación inferior es decir la calificación excelente) son determinados y de la primera desigualdad en (5), convenimos en tomar como parámetro de evaluación o nota excelente a la solución del problema extremal (4).

La **segunda etapa** se lleva a cabo dentro del marco de la simulación dinámica, cuando generada una contraestrategia $w^0(x, u, t)$, en respuesta a la acción de salida $\tilde{u}(t)$, obtenemos la estimación de estabilización real \tilde{L} . El algoritmo de estabilización es considerado para nosotros como una caja negra, dado que la forma en que se construyó es desconocida para nosotros, únicamente tenemos conocimiento de la señal de salida de dicho algoritmo de estabilización (sin embargo, en algunas ocasiones se considera que la estructura del algoritmo a evaluar

es lineal, $\tilde{u} = K(t)x$, donde los parámetros $K(t)$, son desconocidos para nosotros).

En la **tercera etapa**, el resultado de la prueba \tilde{L} , se compara con la estimación menor L^0 :

$$k_0 = \frac{L^0}{\tilde{L}(w^0(x, u, t), \tilde{u}(x, t))} \cdot 100 \quad (6)$$

La relación (6) es una estimación para la calidad de la estabilización, mientras más cercana a la nota excelente se encuentre la estimación mejor será el algoritmo de control que se está evaluando.

3. Pruebas maximin para un robot móvil

Consideramos la clase de robots móviles autónomos que consisten de tres ruedas, dos activas y una pasiva, con restricciones no-holonómicas, que aparecen como consecuencia de la hipótesis de no deslizamiento [2]. Las velocidades del centro de las ruedas son denotadas como v_r y v_l (ver fig.3). La posición del robot (centro del arreglo de sensores) con respecto al sistema de referencia $P_{\xi\eta}$, está dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega \\ \dot{\xi} = v \cos \alpha - h \sin \alpha \\ \dot{\eta} = v \sin \alpha + h \cos \alpha \end{cases} \quad (7)$$

El robot es un sistema no-holonómico y las velocidades de las ruedas activas deben tener la dirección del eje P_x (el sistema de referencia P_{xy} , tiene situado el origen en la intersección del eje de simetría del robot y el centro del eje de las ruedas activas).

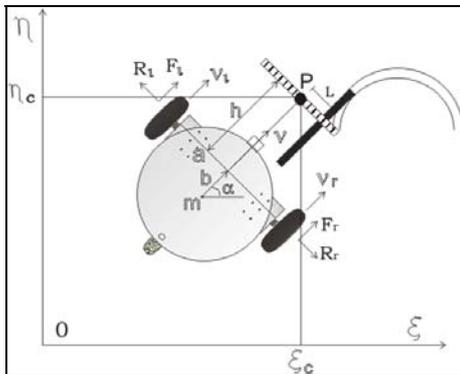


Figura 3: Sistema de coordenadas inercial.

Para obtener las ecuaciones dinámicas, se sustituyen estas restricciones por fuerzas reactivas

\vec{R}_r, \vec{R}_l . Se tienen también dos fuerzas activas \vec{F}_r, \vec{F}_l . Mediante los teoremas principales de la mecánica se describen las ecuaciones en el sistema $P_{\xi\eta}$. Obteniendo las siguientes relaciones dinámicas

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + b\omega^2) &= F_r + F_l \\ \tilde{J}\dot{\omega} + mb\omega v &= (F_r - F_l)a \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo las fuerzas activas por torques de los motores y los voltajes que son aplicados a los mismos

$$M = F\rho \quad (9)$$

Donde M es el torque del motor y el modelo más simple del motor es:

$$M = \chi u - \sigma \dot{\phi} \quad (10)$$

El miembro derecho $\sigma \dot{\phi}$ es la suma de la fricción viscosa y la fuerza contraelectromotriz. Entonces para la rueda derecha

$$F_r = \frac{\chi u_r - \sigma \dot{\phi}}{\rho} ; \quad \dot{\phi}_r = \frac{v_r}{\rho} = \frac{v + \omega a}{\rho} \quad (11)$$

Sustituyendo en la ecuación para cada rueda, y realizando operaciones en (11) se obtienen las ecuaciones dinámicas:

$$m\dot{v} + mb\omega^2 + \frac{2\sigma}{\rho^2}v = \frac{\chi}{\rho}(u_r + u_l) \quad (12)$$

$$\tilde{J}\dot{\omega} + mb\omega v + \frac{2\sigma a}{\rho^2}\omega = \frac{\chi}{\rho}(u_r - u_l)$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones del movimiento que permiten simular la dinámica de este robot:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \cos \alpha - h\omega \sin \alpha \\ \dot{\eta} = v \sin \alpha - h\omega \cos \alpha \\ \dot{\alpha} = \omega \\ m\dot{v} = -mb\omega^2 - \frac{2\sigma}{\rho^2}v + \frac{\chi}{\rho}(u_r + u_l) \\ \tilde{J}\dot{\omega} = mb\omega v - \frac{2a^2\omega\sigma}{\rho^2} + \frac{\chi a}{\rho}(u_r - u_l) \end{cases} \quad (13)$$

Cualquier trayectoria real se puede conseguir realizando combinaciones de trayectorias rectas y semicírculos como se muestra en la fig. 4. Se observa que el robot puede realizar movimientos por líneas rectas horizontales o verticales en cualquier sentido, así como semicírculos también en ambos sentidos.

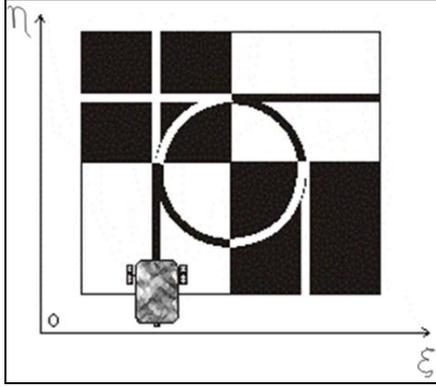


Fig. 4. Tablero de posibles trayectorias programadas.

La tabla 1 muestra el conjunto de trayectorias deseadas, cuando el movimiento se realiza a lo largo de un segmento de línea paralela al eje ξ o al eje η .

Trayectoria.	ξ^d	η^d	α^d	v^d	ω^d
1. Línea horizontal sentido negativo.	$v_0 t + \xi_0$	0	0	v_0	0
2. Línea horizontal sentido positivo.	$v_0 t + \xi_0$	0	π	v_0	0
3. Línea vertical sentido negativo.	0	$v_0 t + \eta_0$	$\frac{\pi}{2}$	v_0	0
4. Línea vertical sentido positivo.	0	$v_0 t + \eta_0$	$-\frac{\pi}{2}$	v_0	0

Tabla 1. Trayectorias programadas para las líneas horizontal y vertical.

En la fig. 4 se muestra un tablero de entrenamiento donde tenemos cuatro cuadrantes, cada uno con una trayectoria circular la cual se puede realizar en dirección a las manecillas del reloj o contraria a ella, entonces se tienen ocho posibles configuraciones como se muestra en la tabla 2.

Utilizando las trayectorias programadas (tablas 1 y 2) podemos escribir el sistema lineal en desviaciones, así el sistema lineal para la trayectoria 4 (tabla 1) es:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v_0 \alpha + h \omega \\ \dot{\eta} = -v \\ \dot{\alpha} = \omega \\ \dot{v} = -\frac{2\sigma}{m\rho^2} v + \frac{\chi}{m\rho} (u_l + u_r) \\ \dot{\omega} = \frac{mbv_0}{\tilde{J}} \omega - \frac{2a^2\sigma}{\tilde{J}\rho^2} \omega + \frac{\chi a}{\tilde{J}\rho} (u_r - u_l) \end{cases} \quad (14)$$

Trayectoria.	ξ^d	η^d	$\varphi \in$	α^d	v^d	ω^d
5. Cuadrante I dirección reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[\frac{\pi}{2}, 0]$	$-\omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
6. Cuadrante I contra reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$\omega_0 t + \frac{\pi}{2}$	$\omega_0 R$	ω_0
7. Cuadrante II dirección reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[\pi, \frac{\pi}{2}]$	$-\omega_0 t + \frac{\pi}{2}$	$\omega_0 R$	ω_0
8. Cuadrante II contra reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\omega_0 t + \pi$	$\omega_0 R$	ω_0
9. Cuadrante III dirección reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[-\frac{\pi}{2}, -\pi]$	$\pi - \omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0
10. Cuadrante III contra reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$\omega_0 t - \frac{\pi}{2}$	$\omega_0 R$	ω_0
11. Cuadrante IV dirección reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[0, -\frac{\pi}{2}]$	$-\omega_0 t - \frac{\pi}{2}$	$\omega_0 R$	ω_0
12. Cuadrante IV contra reloj.	$R \cos \varphi$	$R \sin \varphi$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$\omega_0 t$	$\omega_0 R$	ω_0

Tabla 2. Trayectorias programadas para las líneas circulares.

De la misma forma que se obtuvo el sistema lineal (14) se pueden obtener sistemas lineales para cada una de las trayectorias mostradas en las tablas 1 y 2.

4. Estimación inferior de las pruebas maximin aplicadas a un robot móvil

En este epígrafe resolvemos el problema extremal (4) para obtener la estimación inferior (paso 1) y establecer las pruebas maximin, para solucionar el problema interno de (4), hacemos uso de la programación dinámica de Bellman. El criterio de desempeño (2) es minimizado, dada la dinámica del proceso controlable (1), ahora definimos la función de costo mínima

$$\omega(x, t) = \min_{u(t)} \left\{ \int_t^{t_f} (x^T G(t)x + u^T N(t)u) dt + x^T(t_1) S x(t_1) \right\} \quad (15)$$

Asumiendo que las derivadas parciales de $\omega(x, t)$ existen y son acotadas, se escribe la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, donde $\omega(x, t)$ debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales.

$$0 = \omega_t(x(t), t) + \min_{u(t)} \left\{ x^T G(t)x + u^T N(t)u + \nabla_x \omega(x(t), t) [A(t)x + B(t)u] \right\} \quad (16)$$

Donde $\omega(x(t_f), t_f) = x^T(t_f)Sx(t_f)$. Asumimos que la solución de la ecuación (4.3) es de la forma $\omega(x, t) = x^T P(t)x$, de esta manera se deduce el siguiente control:

$$u^T = -N^{-1}B^T P(t)x \quad (17)$$

Sustituyendo el control (17) en la ecuación (16) se obtiene:

$$0 = x^T \left\{ \frac{\partial P(t)}{\partial t} + G + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BN^{-1}B^T P(t) \right\} x \quad (18)$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} + G - P(t)BN^{-1}B^T P(t) + P(t)A + A^T P(t) = 0 \quad (19)$$

Donde (19) es la llamada ecuación diferencial matricial de Riccati [4] con condiciones finales $P(t_f) = 0$, al solucionar esta ecuación se obtiene la matriz $P(t)$ lo que permite obtener completamente el control (17), así obtenemos la solución del problema interno de (4).

Ahora para solucionar el problema externo de (4) consideramos cuatro movimientos programados; en este caso las trayectorias 2 y 4 de la tabla 1, así como las trayectorias 6 y 7 de la tabla 2 como se muestra en la figura 5.

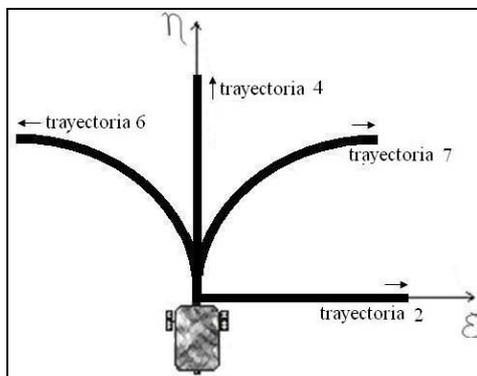


Fig. 5. Trayectorias programadas.

Como consecuencia el conjunto W_0 se considera un conjunto discreto, por lo que resolvemos el problema interno 4 veces y posteriormente tomamos el máximo valor determinando con ello la estimación inferior L^0 .

Para el desarrollo de esta parte consideramos los valores numéricos de los parámetros que intervienen en el robot móvil [5] (ver tabla 3). Sustituimos los parámetros y encontramos el sistema

de ecuaciones lineales en desviaciones, para las trayectorias mostradas en la figura 5.

Variable.	Valor.	Descripción.
v_0	1.5	Velocidad deseada [m/s]
a	0.4	Distancia entre las ruedas [m]
b	0.4	Distancia del centro de masa al eje de las ruedas [m]
h	0.1	Distancia del eje de las ruedas al arreglo de sensores infrarrojos [m]
m	4.5	Masa del robot [Kg]
ρ	0.08	Radio de las ruedas [m]
R	0.35	Radio de inercia del carro [m]
χ	0.01	Fricción viscosa
σ	0.009	Fuerza contraelectromotriz del motor.

Tabla 3. Parámetros del robot móvil.

Para la línea horizontal (sentido positivo) se tiene el siguiente sistema linealizado alrededor de esta trayectoria:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -v \\ \dot{\eta} = -1.5\alpha - 0.1\omega \\ \dot{\alpha} = \omega \\ \dot{v} = -0.625v + 0.0277(u_l + u_r) \\ \dot{\omega} = 7.8435\omega - 0.1743(u_r - u_l) \end{cases} \quad (20)$$

Análogamente obtenemos los sistemas linealizados con las trayectorias mostradas en la fig. 5. Mediante la programación dinámica resolvemos los problemas internos para cada uno de los sistemas anteriores y obtenemos los siguientes resultados.

1. El valor del problema interno para el sistema linealizado con la trayectoria 2 es: 23.5298
2. El valor del problema interno para el sistema linealizado con la trayectoria 4 es: 23.5298
3. El valor del problema interno para el sistema linealizado con la trayectoria 6 es: 8.0087
4. El valor del problema interno para el sistema linealizado con la trayectoria 7 es: 7.8776

Por lo tanto la estimación inferior para las pruebas maximin es:

$$L^0 = 32.0577 \quad (21)$$

5. Evaluación de un sistema de control desconocido

Ahora analizamos la calidad de estabilización de un algoritmo de control (pasos 2 y 3 del sistema de pruebas maximin) que tiene la forma lineal $\tilde{u} = K(t)x$, donde:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \alpha \\ v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Donde los parámetros de $K(t)$ están dados por:

$$\begin{aligned} k_{11} &= -(0.119411 \times 10^{-6})t^8 - (0.108389 \times 10^{-4})t^7 \\ &\quad + (0.898817 \times 10^{-3})t^6 - 0.0227861t^5 + 0.271979t^4 \\ &\quad - 1.63701t^3 + 4.69189t^2 - 5.19183t + 123.582 \\ k_{14} &= -(0.354728 \times 10^{-5})t^8 + (0.25612 \times 10^{-3})t^7 \\ &\quad - (0.751453 \times 10^{-2})t^6 + 0.114973t^5 - 0.978158t^4 \\ &\quad + 4.55636t^3 - 10.6111t^2 + 9.8337t + 95.42 \\ k_{22} &= (0.380492 \times 10^{-6})t^8 - (0.437618 \times 10^{-4})t^7 \\ &\quad + (0.176443 \times 10^{-2})t^6 - 0.0343873t^5 + 0.35581t^4 \\ &\quad - 1.95405t^3 + 5.24845t^2 - 5.52425t + 101.122 \\ k_{23} &= -(0.559137 \times 10^{-5})t^8 + (0.404527 \times 10^{-3})t^7 \\ &\quad - 0.011901t^6 + 0.182708t^5 - 1.5608t^4 \\ &\quad + 7.30545t^3 - 17.109t^2 + 15.9622t + 157.549 \\ k_{25} &= -(0.980086 \times 10^{-5})t^8 + (0.730996 \times 10^{-3})t^7 \\ &\quad - 0.0221376t^6 + 0.349339t^5 - 3.06312t^4 \\ &\quad + 14.6952t^3 - 35.228t^2 + 33.6019t + 101.944 \\ k_{12} &= k_{13} = k_{15} = k_{21} = k_{24} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando el control $\tilde{u} = K(t)x$ determinamos la nota real \tilde{L} (paso 2), para ello sustituimos el controlador en el sistema (13) y utilizamos el índice de desempeño dado en (2), con lo cual obtenemos la estimación real:

$$\tilde{L} = 10003 \quad (22)$$

La última etapa (paso 3) consiste en comparar la estimación real obtenida en (22) con la estimación inferior (21), para esto utilizamos la relación que nos determina la estimación para la calidad de la estabilización dada en (6)

$$k^0 = \frac{32.0577}{10003} * 100 = 0.3205 \quad (23)$$

De acuerdo a lo anterior, podemos concluir que el algoritmo de control evaluado se debe mejorar en su desempeño.

6. Conclusiones

Este trabajo se basa principalmente en el establecimiento y análisis de las pruebas maximin para la calidad de estabilización robusta y como su nombre lo dice, es una estrategia de pruebas que nos determinarán la calidad de un algoritmo de control. El uso de la programación dinámica es de vital importancia, ya que con este método se pudo obtener la estimación inferior y de esta manera tener un parámetro con quien comparar cualquier sistema de control que sea aplicado a un robot móvil como lo ejemplifica este trabajo.

Referencias

- [1] GUTIÉRREZ J. E. M. *Estrategias de las Pruebas Maximin para la Calidad de la Estabilización*, Tesis de doctorado, México 2003, pp. 1-34
- [2] Sadovnichii V. A. y otros, *Maximin Testing of Satellite Stabilization*, Mathematical Modeling of Complex Information Processing Systems, pp. 61-70
- [3] Alexandrov V. V. y Gutiérrez J. E. M. *About the Maximin Testing Strategy*, Sociedad Matemática Mexicana, *Aportaciones Matemáticas Memoria 35*, México 2004, pp. 3-11
- [4] Alexandrov V. V. y Gutiérrez J. E. M. *Pruebas Maximin y Juegos Geométricos*, Sociedad Matemática Mexicana, *Aportaciones Matemáticas Memoria 35*, México 2005, pp. 3-12
- [5] Alexandrov V. V. y otros, *Optimization and Computer-Aided Testing of Stabilization Precision*, Mathematical Modeling of Complex Information Processing Systems, pp. 49-60