

Estabilización de un robot móvil autónomo

Gutiérrez Arias José Eligio Moisés y Suárez Ramírez Hugo

Posgrado en Automatización. Facultad de Electrónica.
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Presentamos el modelo dinámico de un robot móvil autónomo provisto de dos ruedas activas y una pasiva, así como un algoritmo de control para la estabilización de las trayectorias programadas. La programación dinámica es el fundamento para sintetizar el controlador. Posteriormente aplicando un resultado clásico, se determina una ley de control cuando dicha ecuación diferencial se convierte en una ecuación matricial algebraica. Al realizar la simulación de ambos algoritmo, se observa que el nuestro presenta una mejoría en la calidad de la estabilización. Presentamos un ejemplo grafico que comprueba lo antes mencionado.

Palabras clave: Sistema dinámico controlable, robot móvil, programación dinámica, control óptimo.

1. Modelo dinámico

En este trabajo se considera la clase de robots móviles autónomos, que consisten de tres ruedas, dos activas y una pasiva, con restricciones no holónomicas, que aparecen como consecuencia de la hipótesis de no deslizamiento. Las velocidades del centro de las ruedas son denotadas como v_r y v_l , como se observa en la figura 1.

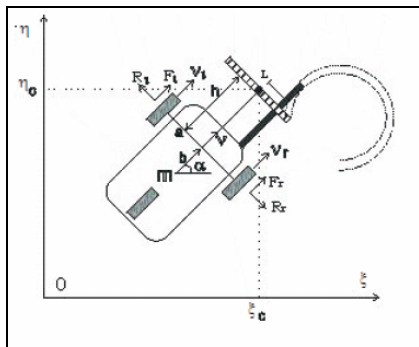


Fig. 1. Sistema de coordenadas inercial.

La posición del robot con respecto al sistema de referencia inercial está dada por las relaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= v \cos \alpha - bw \sin \alpha \\ \dot{y}_c &= v \sin \alpha + bw \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= w \end{aligned} \quad (1)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas, se sustituyen las restricciones no holónomicas por fuerzas reactivas \vec{R}_r, \vec{R}_l . Tenemos también dos fuerzas activas \vec{F}_r, \vec{F}_l . Se describen las ecuaciones en el sistema relativo P_{xy} (ubicado en el robot móvil) mediante teoremas principales de la mecánica clásica.

Obteniendo las siguientes relaciones dinámicas

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + bw^2) &= F_r + F_l \\ \tilde{J}\dot{w} + mbwv &= (F_r - F_l)a \end{aligned} \quad (2)$$

Sustituyendo las fuerzas activas por torques de los motores y los voltajes aplicados a los mismos $M = F\rho$ donde M es el torque del motor, y el modelo más simple del motor es $M = \chi u - \sigma\dot{\phi}$. El miembro que aparece en la parte derecha $\sigma\dot{\phi}$ es la suma de la fricción viscosa y la fuerza contraelectromotriz. Entonces para la rueda derecha tenemos

$$F_r = \frac{\chi u_r - \sigma\dot{\phi}_r}{\rho} \quad (3)$$

sustituyendo en la ecuación para cada rueda y realizando operaciones, obtenemos lo siguiente

$$F_r + F_l = \frac{\chi}{\rho}(u_r + u_l) - \frac{2\sigma}{\rho^2}v \quad (4)$$

$$F_r - F_l = \frac{\chi}{\rho}(u_r - u_l) - \frac{2a\sigma}{\rho^2}w$$

Las ecuaciones dinámicas (2) se transforman en

$$m\dot{v} = -mbw^2 - \frac{2\sigma}{\rho^2}v + \frac{\chi}{\rho}(u_r + u_l) \quad (5)$$

$$\tilde{J}\dot{w} = mbwv - \frac{2a^2w\sigma}{\rho^2} + \frac{\chi a}{\rho}(u_r - u_l)$$

que junto con las ecuaciones (1), forman el modelo dinámico controlable del robot móvil.

2. Trayectorias programadas

Cualquier trayectoria programada se puede realizar, considerando la combinación de las trayectorias que se presentan en la siguiente figura

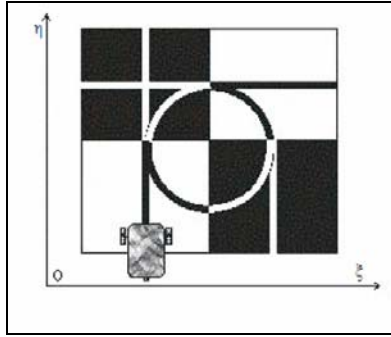


Fig. 2. Tablero de entrenamiento.

El cuadro de la figura 3 muestra el conjunto de trayectorias deseadas, cuando el movimiento se realiza a lo largo de un segmento de línea paralelo al eje $O\xi$, o al eje $O\eta$.

En la situación que el robot se mueve a lo largo de un segmento del círculo de diámetro R centrado en el vértice de uno de los cuadrados del tablero de entrenamiento, según se observa en la figura 2, tenemos cuatro cuadrantes contados en dirección opuesta al sentido del reloj, dividiendo entonces al círculo en cuatro partes iguales. Se tiene ocho configuraciones, de las cuales presentamos únicamente la correspondiente al cuadrante I en la dirección del reloj

$$\begin{cases} \xi^d = R \cos \varphi, & \eta^d = R \sin \varphi, & \text{con } \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, 0 \right] \\ \alpha^d = \omega_0 t, & v^d = \omega_0 R, & w^d = \omega_0 \end{cases} \quad (6)$$

Las restantes se obtienen de manera análoga.

Trayectoria	ξ^d	η^d	α^d	v^d	w^d
1. Línea horizontal sentido negativo	$v_0 t + \xi_0$	0	0	v_0	0
2. Línea horizontal sentido positivo	$v_0 t + \xi_0$	0	π	v_0	0
3. Línea vertical sentido positivo	0	$v_0 t + \eta_0$	$\frac{\pi}{2}$	v_0	0
4. Línea horizontal sentido negativo		$v_0 t + \eta_0$	$\frac{\pi}{2}$	v_0	0

Fig. 3. Trayectorias programadas.

2.1 Ecuaciones lineales en desviaciones.

Si $u^d(t)$ es una entrada nominal al sistema descrito por las ecuaciones dinámicas y $y^d(t)$ es una trayectoria nominal de dicho sistema, entonces podemos encontrar aproximaciones a soluciones vecinas, para pequeñas desviaciones en el estado inicial y en la entrada.

Utilizando el proceso de linealización con las trayectorias programadas se obtienen respectivamente los sistemas de ecuaciones lineales en desviaciones. Considerando el sistema lineal para la línea horizontal como trayectoria deseada (sentido positivo):

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= -v \\ \dot{y}_c &= -v_0 \alpha - bw \\ \dot{\alpha} &= w \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{v} = -\frac{2\sigma}{\rho^2 m}v + \frac{\chi}{\rho}u_1$$

$$\dot{w} = -\frac{mbv_0}{\tilde{J}}w - \frac{2a^2\sigma}{\rho^2 \tilde{J}}w + \frac{\chi a}{\tilde{J}\rho}u_2$$

Si la trayectoria deseada es un semicírculo se obtienen los ocho sistemas en desviaciones lineales, sustituyendo cada uno de los movimientos deseados.

3. Establecimiento del problema

Consideremos el sistema dinámico controlable

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, u) \\ u(\cdot) \in U &= \{u : u(t) \in \Omega \subseteq \mathfrak{R}^r\} \end{aligned} \quad (8)$$

donde y es el vector n -dimensional que contiene las coordenadas de estado del sistema, u es un vector r -dimensional que representa los controles de entrada y $f(y, u)$ es de clase C^2 . Asumimos que dados, algún movimiento deseado $y^d(t)$ y un control deseado $u^d(t)$; satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{y}^d &= f(y^d(t), u^d(t)) \\ u(\cdot) \in U, \quad t &\in [t_0, t_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Se obtienen las ecuaciones lineales en desviaciones

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\Delta u \quad (10)$$

Aparece el problema de la estabilización, mediante el empleo de la información de coordenadas, determinar el control $\Delta u(\cdot)$ tal que las desviaciones actuales disminuyan asintóticamente. En este punto del trabajo asumimos que tenemos información completa y exacta de todas las coordenadas.

4. Diseño del control

Diseñamos el control considerando el sistema (7) y el siguiente indicador para la calidad de la estabilización

$$\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1} (x^T G x + u^T N u) dt \quad (11)$$

en donde se asume que $G = G^T \geq 0$, $N^T = N \geq 0$.

La programación dinámica es la base para la construcción del algoritmo de control. Bellman demostró que la función

$$W(x, t) = \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T G x + u^T N u) dt \right\} \quad (12)$$

debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_{u \in U} \left\{ (x^T G x + u^T N u) + \frac{\partial W}{\partial x} (Ax + Bu) \right\} = 0 \quad (13)$$

$$W(x, t_1) = 0$$

Si

$$u^0 = \arg \min_{u \in U} \left\{ (x^T G x + u^T N u) + \frac{\partial W}{\partial x} (Ax + Bu) \right\} \quad (14)$$

entonces u^0 es un control óptimo y tiene la forma

$$u^0 = -\frac{1}{2} N^{-1} B^T \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T \quad (15)$$

Proponemos la solución a la ecuación (13) de Bellman como

$$W(x, t) = x^T L x, \quad \text{con } L = L^T \quad (16)$$

Posteriormente, sustituimos W y u^0 en dicha ecuación y simplificando recibimos

$$x^T (\dot{L} + G - L B B^T L + 2LA) x = 0 \quad (17)$$

de donde se deduce la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{L} = L B B^T L - G - 2LA = 0 \quad \text{con } L(t_1) = 0 \quad (18)$$

De esta manera se obtiene la forma del control como sigue

$$u^0 = -\frac{1}{2} N^{-1} B^T L(t) x \quad (19)$$

donde $L(t)$ es solución de la ecuación diferencial de Riccati.

4.1 Algoritmo de control.

En el diseño del control, los valores de los parámetros que se han utilizado, se describen en el cuadro de la figura 4, en donde las matrices A y B del sistema (7) tienen la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3923 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0278 & 0 \\ 0 & 0.1744 \end{pmatrix}$$

en esta situación, el sistema es completamente controlable; si no es así, no se puede aplicar este algoritmo.

Variable	Valor	Descripción
V_0	1.5	Velocidad deseada, en (mts./ seg.)
a	0.40	Distancia entre ruedas (mts.)
b	0.05	Distancia del centro de masa al eje de las ruedas (mts.)
h	0.10	Distancia del eje de las ruedas al arreglo de sensores ópticos (mts.)
m	4.5	Masa del robot (kg.)
ρ	0.08	Radio de las ruedas (mts.)
R	0.35	Radio de inercia del móvil (mts.)
χ	0.01	Fricción viscosa
σ	0.009	Fuerza contraelectromotriz de los motores
\tilde{J}	0.2868	Momento de Inercia

Fig. 4. Valores numéricos de las variables.

Proponemos la función de Bellman como

$$w(x, t) = x(t)L(t)x(t) \quad (21)$$

y obtenemos la ecuación matricial diferencial de Riccati con condiciones finales

$$\begin{aligned} \dot{L} &= LBB^T L - 2AL - G \\ L(t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Puesto que el sistema es de condiciones finales, se considero en el tiempo inverso obteniendo un sistema con condiciones iniciales y se resuelve. Posteriormente mediante el empleo de polinomios se obtiene una aproximación de cada uno de los elementos de la matriz $L(t)$. Dado que estos resultados están escritos en el tiempo inverso nuevamente transformamos al tiempo directo, encontrando todos los elementos de la matriz $L(t)$, por lo que el control se escribe como

$$u = -N^{-1}B^T L(t)x(t) \quad (23)$$

se sustituye dicho control en el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (24)$$

y resolviendo simulamos el comportamiento de las variables de estado.

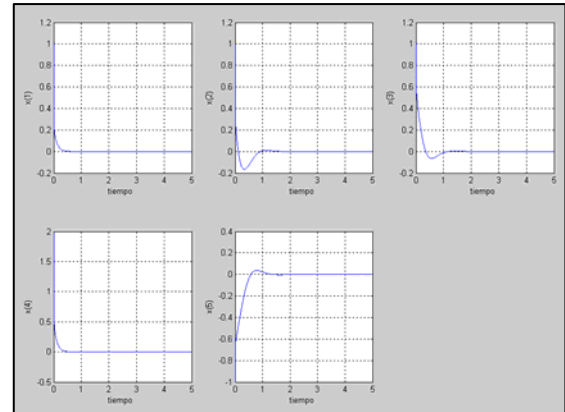


Fig. 5. Comportamiento de las variables de estado.

En el siguiente diagrama se resumen los pasos para determinar el control.

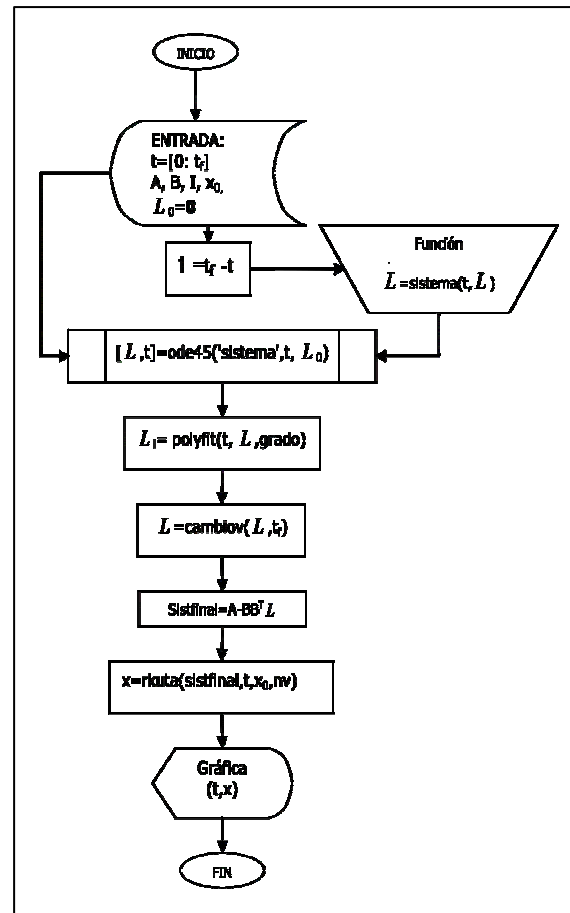


Fig. 6. Algoritmo de control.

4.2 Aplicación del resultado de Kalman.

Aplicando el resultado de Kalman [5], se obtiene la ecuación algebraica de Riccati

$$0 = LBB^T L - 2AL - G \quad \text{con } L(t_1) = 0 \quad (25)$$

En este caso se resuelve el sistema utilizando la función de MatLab *care*, se calcula el comportamiento de las variables de estado como se muestra en la Figura 7.

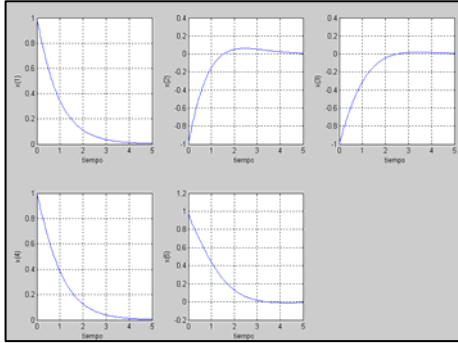


Fig. 7. Comportamiento de las variables de estado ($t \rightarrow \infty$).

5. Situación de información incompleta

Teniendo la información primaria $\tilde{z} = Cx$, trataremos de construir el proceso informativo de identificación de las desviaciones, o sea, un proceso de construcción de estimaciones insesgadas y consistentes \tilde{x} de las desviaciones.

Un observador estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de control. Por tanto, los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

El robot móvil cuenta con tres sensores que dan información de las coordenadas (x, y, α) , por tanto las matrices a considerar son, la matriz A como aparece en (20) y la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

con dichas matrices se verifica la condición de observabilidad completa, así que se construye un estimador para obtener la información completa de las cinco coordenadas.

Utilizando el modelo matemático del observador

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) \quad (27)$$

Donde \tilde{x} es el estado estimado y K_e es la matriz de ganancia del observador. La ecuación de error del observador esta definida de la siguiente forma

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) = (A - K_e C)(x - \tilde{x}) \quad (28)$$

A partir de la ecuación anterior, observamos que el comportamiento del vector de error está determinado por los valores propios de la matriz $(A - K_e C)$. Si esta matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial. En esta situación la matriz que se obtuvo es

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Con la matriz (29), los valores propios de $(A - K_e C)$ tienen parte real negativa lo que garantiza que podemos construir las estimaciones insesgadas y consistentes \tilde{x} , resolviendo el sistema (27).

6. Conclusiones

El desempeño mostrado en el algoritmo de control cuando el tiempo t_1 es fijo muestra un muy buen desempeño en la calidad de la estabilización, esta situación es cuando dicho algoritmo involucra la solución la ecuación diferencial matricial de Ricatti.

En la situación en que $t = \infty$, se simplifican los cálculos debido a la solución de la ecuación algebraica de Ricatti, sin embargo el tiempo de estabilización aumenta.

Referencias

- [1] Aníbal O. B., “*Robótica Manipuladores y Robots Móviles*”, Marcobombo, 2001.
- [2] Donald E. K., “*Optimal Control Theory And Introduction*”, Printice-Hall, 1970.
- [3] Grez-Knowles, “*An Introduction to Applied Optimal Control*”, New york and London Academic Press, 1981.
- [4] Jean-Jaques E. Slotine y Weiping Li., “*Applied Nonlinear Control*”, Pearson Education, Republic of China, 2004.
- [5] Kalman, R. E., “*Contributions to the Theory of Optimal Control*”, Bulletin of Mexican Mathematic, 1960, P 102-119.
- [6] Marcelo R. M., “*Intermediate Dynamics*”, Boletín de Matemática Mecánica, McGraw-Hill, 2004.
- [7] Roland S. and Illah R. N., “*Introduction to Autonomous Mobile Robots*”, 2004.