6to. Congreso Nacional de Mecatrónica, Noviembre 8-10, 2007
Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, S.L.P.
Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C.

Análisis de sistemas con retroalimentación no lineales

Lewinski Komincz Artur Juliusz, Gorrostieta Hurtado Efrén.
Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Querétaro
arturlewinski@yahoo.com, efren.hurtado@usa.net

Resumen.

En este trabajo, se propone un método genérico alternativo simplificado para la obtención de la expresión de salida de un sistema actuador-sensor o sistema con retroalimentación, el cual es no lineal. El método permite obtener una función de transferencia en forma de series de Taylor en donde los coeficientes se mantienen en forma simbólica, lo cual permite al usuario un mejor análisis de los factores que afectan la respuesta deseada.

Sistema no lineal, Retroalimentación, Coeficientes simbólicos,.

1. Introducción.

La naturaleza de muchos actuadores tanto como sensores es no-lineal, lo cual dificulta la transferencia deseada de una entrada hacia una salida. Es por ello que el estudio y análisis de no-linealidades es muy útil para el diseño de sistemas. Sin embargo, una solución puramente numérica no nos puede dar la información adecuada para el entendimiento de cuales deben de ser las características del actuador y retroalimentación para la obtención de una respuesta deseada. Es por ello que una solución algebraica o simbólica basada en los parámetros del actuador y sensor es preferible ya que nos muestra que parámetros son los que contribuyen a los diferentes grados de no linealidad. El problema, sin embargo, es que el manejo de ecuaciones no lineales puede llegar a ser muy complejo y tedioso; de hecho, en muchos casos no es posible encontrar una solución algebraica directa. De tal manera, en la literatura es posible encontrar algunos métodos para lidiar con este tipo de sistemas como derivación de series de Volterra [1] los cuales, aunque pueden encontrar una solución, pueden resultar en un desarrollo complejo. En este trabajo, proponemos un método genérico alternativo simplificado para la obtención de los coeficientes algebraicos de la función de transferencia en series de Taylor de un sistema no lineal con retroalimentación.

Un sistema general no lineal se muestra en la figura 1. El bloque A o actuador recibe la suma o resta de la señal de entrada con la señal de retroalimentación z proveniente del bloque B o sensor. En lugar de usar expresiones cerradas, es preferente desarrollarlas en series de Taylor, ya que nos permite una mejor visión de las contribuciones no lineales así como simplificar el desarrollo. Una ventaja adicional de las series de Taylor, es que nos permite manejar la complejidad de la expresión a expensas de la precisión del resultado basada en el número de términos a considerar; esta decisión es tomada por el usuario dependiendo del sistema y los requerimientos. Es así que los términos a1 hasta an son expresiones algebraicas basadas en los parámetros del actuador y las expresiones b1 hasta bn basadas en los parámetros del sensor.

El objetivo de este análisis es obtener la función de salida y en base a x. Para ello, uno pudiera intentar sustituir z con la función de transferencia del bloque B en el bloque A y resolver. Sin embargo, el resultado consistirá en una ecuación de un grado muy alto, lo cual resultaría muy complejo, y de hecho, si la ecuación es de quinto o mayor grado no es ni posible resolverla como lo demostró el matemático Niels Henrik Abel en 1824 [2].

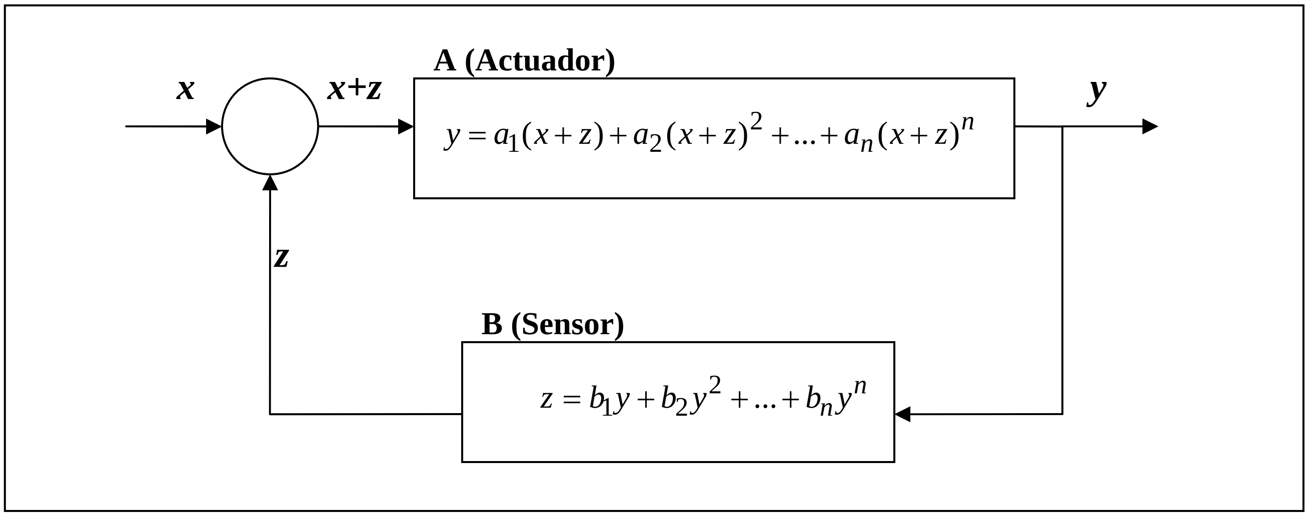

Figura 1. Un sistema con retroalimentación no lineal.

El resultado directo en series de Taylor es más útil para el análisis de no linealidades que una expresión cerrada. Esto es dado a que una expresión de Taylor contiene el término lineal y los términos no lineales los cuales aumentan de complejidad conforme aumenta el grado. Dependiendo del sistema y la precisión requerida, los términos de cierto grado en adelante pueden ser ignorados. Es así que la solución al sistema no lineal es:

$$y = c_1 x + c_2 x + ... + c_n^{\,n} \qquad (1)$$

En los cuales hasta este punto las expresiones c1 hasta cn son desconocidas hasta este momento y son basadas en términos de a1..an y b1..bn.

En al figura 1. z, que es la salida del sensor, esta expresada como:

$$z = b_1 y + b_2 y^2 + ... + b_n y^n \qquad (2)$$

2. Desarrollo.

Comenzamos con sustituir (1) en (2) y en la cual obtenemos:

$$z = k_1 x + k_2 x^2 + ... + k_n x^n \qquad (3)$$

Los coeficientes k1 a kn se pueden obtener manualmente realizando algebra durante la sustitución de (2) en (1), pero la siguiente expresión basada en una modificación del teorema multinomial [3], nos facilita el proceso del resultado e incluso la automatización del mismo mediante un programa de computadora:

$$k_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{n!}{p_1!\, p_2! .. p_m!} \right) c_1^{\,p_1} c_2^{\,p_2} ... c_m^{\,p_m} \right) \qquad (4)$$

En donde p1 a pn son todas las combinaciones de números y enteros que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{q=1}^{m} q p_q = n, \sum_{q=1}^{m} p_q = i \qquad (5)$$

En esta expresión se debe de considerar que el factorial de cero es 1 (0! = 1). Nótese de (5) que los contenidos del coeficiente kn solo incluirá un término con coeficiente cn. Por ejemplo el coeficiente k3 solo contendrá un término con c3 y los demás únicamente con combinaciones de c2 y c1.

Nótese que los coeficientes c1 a cn siguen siendo desconocidos hasta este punto. En el siguiente paso creamos una ecuación basado de (3) en (1), la cual tiene esta forma:

$$\begin{aligned} c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n &= a_1\left((k_1+1)x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots + k_nx^n\right) + \\ &+ a_2\left((k_1+1)x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots + k_nx^n\right)^2 + \ldots \\ &+ a_n\left((k_1+1)x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots + k_nx^n\right)^n \end{aligned} \quad (6)$$

Y que puede ser simplificada como:

$$c_1x + c_2x + \ldots + c_n{}^n = d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_nx^n \quad (7)$$

Los coeficientes d1 a dn se pueden computar de manera similar que en (4), de manera que podemos obtener:

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{n!}{p_1!\,p_2!..p_m!} \right) (k_1+1)^{p_1} k_2{}^{p_2} \ldots k_m{}^{p_m} \right)$$

(8)

Las mismas condiciones usadas en (4) se aplican para (8) en cuanto a las potencias p1 hasta pn.

Para que la ecuación (7) sea valida para toda x, la siguiente condición se tiene que cumplir:

$$c_q = d_q \quad (9)$$

De esta manera, se pueden resolver los coeficientes c1 a cn en base a (9). Para este fin, tenemos la fortuna de poder usar la propiedad inherente en la cual nos permite evitar el uso de sistemas de ecuaciones simultáneas de varias variables. Lo anterior, es dado a que el término derecho de cq en (9) solo tendrá un solo termino c con subíndice q y los demás serán con subíndice menor a q. Es así que podemos comenzar resolviendo directamente c1, seguir con c2 y así sucesivamente hasta obtener el número de coeficientes necesarios para tener la precisión deseada. Finalmente la siguiente expresión puede ser derivada a partir de (9) para calcular los coeficientes no lineales de la función de transferencia del sistema (1):

$$c_n = \frac{k_n}{1-a_1} \sum_{i=2}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{n!}{p_1!\,p_2!..p_m!} \right) (k_1+1)^{p_1} k_2{}^{p_2} \ldots k_m{}^{p_m} \right)$$

(10)

3. Conclusión.

Este resultado permite una mejor visualización de no-linealidades de un sistema actuador-sensor dado que mantiene una representación algebraica. Este tipo de análisis también se puede aplicar a otro tipo de sistemas como circuitos electrónicos no lineales. Nótese que dada la forma de las series, es posible automatizar el cálculo de coeficientes mediante un programa de computadora que determine los coeficientes y la posibilidad de la adaptación de un optimizador.

Referencias.

[1] Schetzen M. "*The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*", (1980)
[2] Fraleigh. J. B. "*A First Course in Abstract Algebra*". Fifth Edition. Addison-Wesley, 1994. ISBN 0-201-59291-6.
[3] Merran E.; Hastings N., Peacock B(2000). "*Statistical Distributions*". New York: Wiley, 134-136. 3rd ed.. ISBN 0-471-37124-6.