

# Control de un brazo robot sub-actuado de 2 grados de libertad

Pablo Sánchez-Sánchez, Fernando Reyes-Cortés, Antonio Michua-Camarillo, Vladimir V. Alexandrov  
 Carmen Juárez Aguilar y J. Guillermo Cebada-Reyes

Universidad Autónoma de Puebla (F. C. E. & F. C. F. M.) - Robotics Team "oocelo"  
 lepable@ece.buap.mx, freyes@ece.buap.mx, amc@ece.buap.mx

**Abstract** - El objetivo de este trabajo es proponer un control para el pendubot de la empresa *Quanser*, haciendo que éste balancee el eslabón desde la posición de equilibrio y lo lleve a la posición deseada, la cual es inestable, utilizando dos algoritmos de control. Primero se obtiene el modelo matemático, posteriormente se analiza la estabilidad del sistema y se linealizan las ecuaciones alrededor de los puntos de equilibrio. El análisis del sistema cuenta con el correspondiente sustento matemático y el adecuado proceso de simulación.

## I. INTRODUCCIÓN.

El péndulo invertido es uno de los ejemplos más conocidos de sistemas para estabilizar, fue ampliamente estudiado por la industria aeroespacial, y hoy en día todavía es un problema importante de control, ya que cada vez hay más sistemas que pueden aproximarse con este modelo [1,2].

Además de la industria aeroespacial, el modelo del péndulo invertido tiene aplicaciones en diversas áreas de la ciencia como en la biotecnología donde se modelan diversos sistemas (caminadores bípedos, etcétera) [3]; ó en anatomía, donde la postura y la locomoción han encontrado mucha similitud con la dinámica del péndulo invertido, donde la posición del pie requiere del control de balance, considerando que el balanceo resulta de estirar los músculos, lo cual es un tipo de estabilización local por realimentación de la dinámica involucrada en la posición de pie [4]. Ahora bien, el interés sobre el problema local del péndulo invertido reside en la estabilización de una posición inestable en lazo abierto, lo cual constituye un problema de control notable que puede ser resuelto por métodos lineales, ya que en sistemas lineales la estabilización de un punto inestable en lazo abierto no ofrece gran problema, éstos aparecen cuando el sistema es no lineal [1].

El pendubot es una parte contraria del acrobot [5] que tiene dos acoplamientos, éste último tiene un motor en el codo, en cambio el pendubot lo tiene en el hombro, lo que facilita la matemáticos sin dejar de tener su complejidad. El objetivo de este trabajo es implementar un control el cual balancee los eslabones desde su posición de equilibrio y los lleve a la posición deseada, como el segundo eslabón es sub-actuado necesitamos la ayuda de otro control, para que mantenga al eslabón en equilibrio; los puntos de equilibrio inestables son propuestos, a estas posiciones les llamaremos *arriba y media*.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe la dinámica del pendubot; en la sección 3 se detallan los parámetros del prototipo; en la sección 4 se describe el controlador lineal; y finalmente las conclusiones se puntualizan en la sección 5.

## II. SISTEMA DINÁMICO DEL PENDUBOT.

Situando al pendubot en un sistema de referencia como se muestra en la figura 1, decimos que  $l_1$  es la longitud del eslabón uno;  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$  son las distancias al centro de la masa de los eslabones;  $q_1$  y  $q_2$  son los desplazamientos angulares realizados por los eslabones.

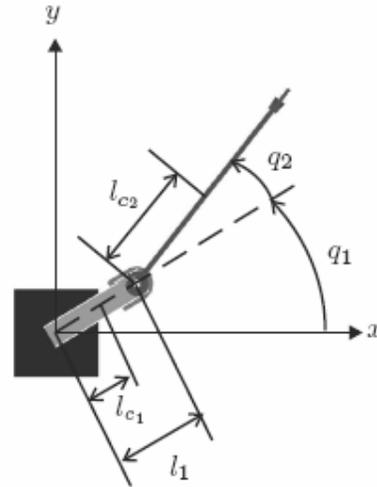


Fig 1. Pendubot.

Usando la formulación de Euler-Lagrange, encontramos las ecuaciones de movimiento que describen al sistema considerando todos los parámetros involucrados en función al sistema de referencia.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1)$$

donde  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  son el vector de posición, velocidad y aceleración articular del robot, respectivamente,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta,  $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el par gravitacional,  $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el par aplicado y  $\tau_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  representa las perturbaciones externas.

Para simplificar las operaciones algebraicas de la ecuación de movimiento se agruparon siete parámetros quedando sólo cinco.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{c1} \\
 \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_{c2} \\
 \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\
 \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\
 \theta_5 &= m_2 l_{c2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Las variables utilizadas son las siguientes:

- $m_1$  = masa total del primer eslabón [kg].
- $l_1$  = longitud del primer eslabón [m].
- $l_{c1}$  = distancia al centro de masa del primer eslabón [m].
- $I_{c1}$  = momento de inercia del primer eslabón respecto al eje que pasa por su centro de masa [ $kg \ m^2$ ].
- $m_2$  = masa total del segundo eslabón [kg].
- $l_{c2}$  = distancia al centro de masa del segundo eslabón [m].
- $I_{c2}$  = momento de inercia del segundo eslabón respecto al eje que pasa por su centro de masa [m].
- $g$  = la aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ].

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Despejando  $\ddot{q}$  de la ecuación (1):

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)], \tag{7}$$

obtenemos nuestras variables de estado:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= q_1 \\
 x_2 &= \dot{q}_1 \\
 x_3 &= q_2 \\
 x_4 &= \dot{q}_2 \\
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= (T_1 m_{22} - T_2 m_{12}) / \det M \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= (T_2 m_{11} - T_1 m_{21}) / \det M
 \end{aligned} \tag{8}$$

Con los cuales podemos reescribir los elementos de las matrices  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) \\
 m_{12} &= m_{21} = \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\
 m_{22} &= \theta_2 \\
 c_{11} &= -\theta_3 \sin(q_2) q_2 \\
 c_{12} &= -\theta_3 \sin(q_2) q_1 - \theta_3 \sin(q_2) q_2 \\
 c_{21} &= \theta_3 \sin(q_2) q_1 \\
 c_{22} &= 0 \\
 g_1 &= \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\
 g_2 &= \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\
 \det M &= m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} \\
 T_1 &= \tau - c_{11} \dot{q}_1 - c_{12} \dot{q}_2 - g_1 \\
 T_2 &= 0 - c_{21} \dot{q}_1 - c_{22} \dot{q}_2 - g_2
 \end{aligned} \tag{3}$$

### III. DEFINICIÓN DEL CONTROL LOCAL

Para la realización de este control linealizamos las ecuaciones de movimiento del pendubot, diseñando un controlador por retroalimentación de estados con el modelo lineal. Para linealizar la planta se utilizaron las *series de Taylor*.

$$f_a(x, u) = f_a(x_r, u_r) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_r, u_r} (x - x_r) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_r, u_r} (u - u_r) \tag{9}$$

Siendo  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  el vector de estado,  $u$  es la señal de entrada al pendubot;  $x_r$  y  $u_r$  son los puntos de equilibrio, entonces al encontrar la derivada parcial y evaluar  $f(x_r, u_r)$  en su punto de equilibrio, esto es  $f(0, 0)$ :

quedando las matrices del sistema en forma simplificada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Para analizar al pendubot consideramos dos puntos de equilibrio: el primero se localiza cuando el brazo se encuentra en la posición hacia *arriba*, figura (2), teniendo como puntos de equilibrio  $x_{d1} = \pi/2$ ,  $x_{d3} = 0$  y  $u_d = 0$

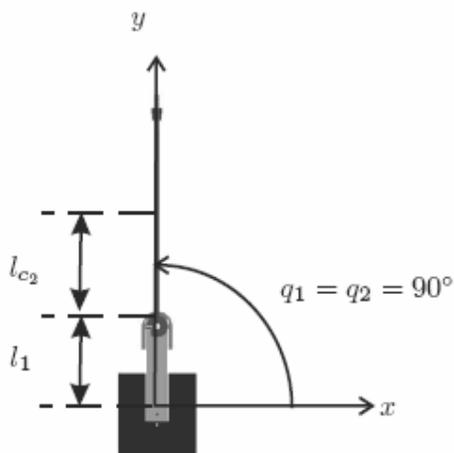


Fig. 2. Péndulo en posición *arriba*.

El segundo punto se encuentra cuando el segundo eslabón queda hacia arriba, a esta posición le llamaremos *media*, figura (3), con

los siguientes puntos de equilibrio  $x_{d1} = -\pi/2$ ,  $x_{d3} = \pi$  y  $u_d = 0$

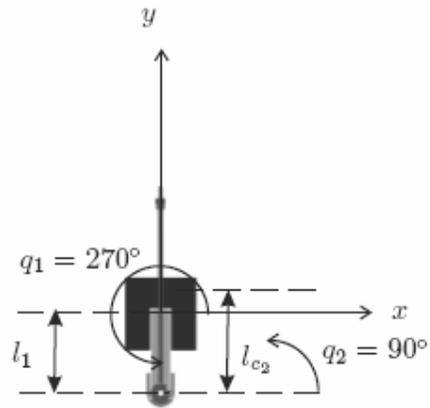


Fig. 3. Péndulo posición *media*.

El fabricante proporciona los siguientes parámetros

Tabla 1. Parámetros del fabricante

|            |        |
|------------|--------|
| $\theta_1$ | 0.0761 |
| $\theta_2$ | 0.0662 |
| $\theta_3$ | 0.0316 |
| $\theta_4$ | 0.9790 |
| $\theta_5$ | 0.3830 |

Usando los puntos de equilibrio y los parámetros anteriores, el modelo lineal del péndulo *arriba* y *media* queda descrito de la siguiente forma:

*Arriba*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0(12) \\ 127.877 & 0 & -29.3637 & 0(13) \\ 0 & 0 & 0 & 1(14) \\ -132.22 & 0 & 100.078 & 0(15) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0(17) \\ 16.3891(18) \\ 0(19) \\ -24.2124(20) \end{bmatrix} \quad (21)$$

*Media*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0(22) \\ -127.877 & 0 & 29.3637 & 0(23) \\ 0 & 0 & 0 & 1(24) \\ 123.534 & 0 & 41.3507 & 0(25) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0(27) \\ 16.3891(28) \\ 0(29) \\ -8.5659(30) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Las matrices anteriores están en el espacio continuo, pero para nuestro control necesitamos discretizarlas, esto es:

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k \text{ a } 0.002 \text{ segundos.}$$

#### IV. CONTROL DE BALANCEO

Este control esta dividido en dos, el que lo lleva a la posición de equilibrio y el control de balanceo. Para el control de balanceo se utiliza linealización parcial. Entonces si derivamos el control por retroalimentación parcial. Usando la ecuaciones de movimiento del sistema propuestas por Spong y Vidyasagar [5]

$$\tau_1 = m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + g_1(q) \quad (32)$$

$$0 = m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + g_2(q) \quad (33)$$

Como el eslabón 2 es subactuado no se puede linealizar la dinámica sobre ambos grados de libertad. Por lo tanto solo se linealizará el grado de libertad  $q_1$ , luego nos ayudamos de un control de lazo abierto que siga la trayectoria dada por el grado de libertad linealizado. Despejando la aceleración angular de (33) obtenemos:

$$\ddot{q}_2 = \frac{-m_{21}\ddot{q}_1 - c_{21}\dot{q}_1 - g_2(q)}{m_{22}} \quad (34)$$

sustituyendo (34) en (32) tenemos

$$\tau_1 = \bar{m}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{g}_1(q) \quad (35)$$

con

$$\bar{m}_{11} = m_{11} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}} \quad (36)$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{m_{12}c_{21}}{m_{22}} \quad (37)$$

$$\bar{c}_{12} = c_{12} \quad (38)$$

$$\bar{g}_1 = g_1 - \frac{m_{12}g_2}{m_{22}} \quad (39)$$

Con el método de linealización completo, el control de lazo cerrado que linealiza el grado de libertad  $q_1$  se puede definir como:

$$\tau_1 = \bar{m}_{11}v_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{g}_1(q) \quad (40)$$

Ahora si

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (41)$$

$$-m_{21}v_1 = m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + g_2(q) \quad (42)$$

Ahora (41) es lineal, entonces se puede implementar un control de lazo cerrado que siga la trayectoria dada por el eslabón uno, por tanto la ecuación no lineal (42) es la respuesta al eslabón dos. Ésta representa la dinámica interna con respecto a una salida

$y = q_1$ . El objetivo del control de lazo abierto, es seguir una trayectoria dada por el eslabón uno y al mismo tiempo excitar la dinámica interna para balancearlo y llevarlo a la posición de equilibrio. Se opto por utilizar un PD con retroalimentación directa de aceleración.

$$v_1 = \ddot{q}_1^d + K_d(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + K_p(q_1^d - q_1) \quad (43)$$

La matriz de ganancias K la podemos construir utilizando el software **Matlab**, para lo cual usamos la instrucción:  $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$  [?] conocemos  $A$  y  $B$  y proponemos las matrices  $Q$  y  $R$ .

En nuestro caso utilizamos un control LQR para cada posición, cabe mencionar que dicho control fue discretizado. La matriz de ganancias fue obtenida con un periodo de muestreo de 0.002 segundos.

Para la posición *arriba*:

$$R = [2] \quad (44)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0(4) \\ 0 & 0 & 1 & 0(5) \\ 0 & 0 & 0 & 0(6) \end{bmatrix} \quad (45)$$

Se obtuvieron las siguientes ganancias

$$K_{arriba} = \begin{bmatrix} -103.1041 & -17.4983 & -103.4362 & -13.45 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Para la posición *media*:

$$R = [1] \quad (46)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0(10) \\ 0 & 1 & 0 & 0(11) \\ 0 & 0 & 1 & 0(12) \\ 0 & 0 & 0 & 1(13) \end{bmatrix} \quad (47)$$

dándonos una matriz de ganancias

$$K_{media} = \begin{bmatrix} 70.4404 & 8.0650 & 88.9295 & 11.6103 \end{bmatrix} \quad (48)$$

### V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección mostramos las gráficas reales. Empezaremos detallando las gráficas de las fig. (4) y fig(5) que son las graficas de la  $q_1$  y  $q_2$  en posición *arriba*, podemos observar como el control de balanceo y el de equilibrio entran casi inmediatamente llevando el brazo a la posición de equilibrio deseada. Para el control de balanceo utilizamos una ganancia proporcional  $K_p = 40.8$  y la ganancia derivativa  $K_d = 12$ .

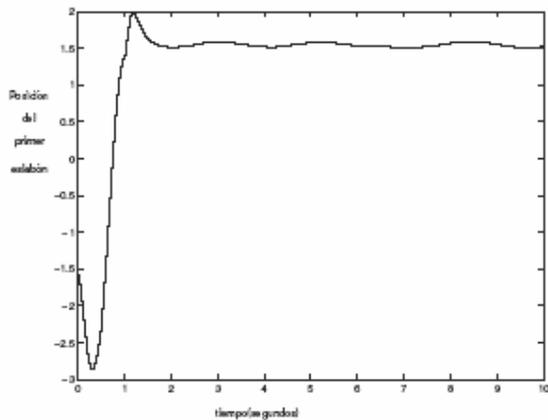


Fig. 4  $q_1$  en posición ARRIBA.

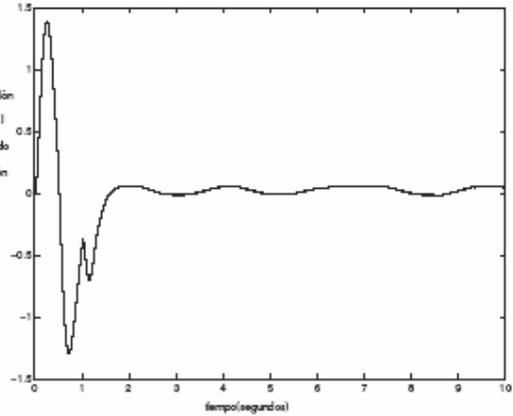


Fig. 5.  $q_2$  en posición ARRIBA.

Las gráficas de las fig. (6) y fig (7) que son las graficas de la  $q_1$  y  $q_2$  en posición *media*, Se utilizaron una ganancia proporcional  $K_p = 35$  y la ganancia derivativa  $K_d = 12$  para el control de balanceo.

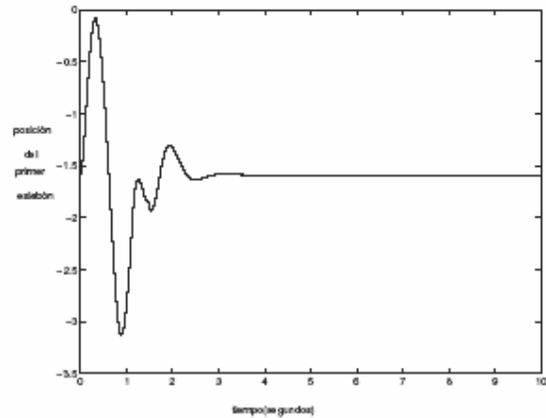


Fig. 6.  $q_1$  en posición "MEDIA".

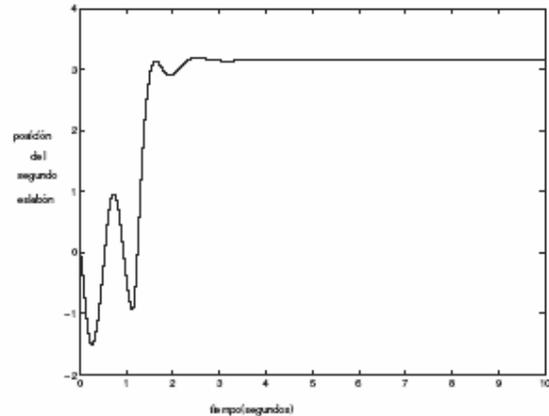


Fig. 7.  $q_2$  en posición "MEDIA".

Cabe mencionar que se hicieron varias pruebas cambiando la matriz de ganancias que obteníamos con las matrices discretizadas y funcionaban bien, pero con las que tuvimos mejores resultados fueron las que hemos mencionado anteriormente.

## VI. CONCLUSIONES

Durante la realización de los controladores se presentaron varios problemas uno de ellos fue que linealizamos nuestras ecuaciones en espacio continuo y no obteníamos resultados deseados, se optó por la discretización de las ecuaciones teniendo resultados satisfactorios. Otra fue, el cable que alimenta al encoder, el cual une a los eslabones, éste es un poco rígido, lo cual interfiere e impide un buen funcionamiento.

## REFERENCIAS

- [1] J. Aracil, F. Gordillo, *El Péndulo Invertido: Un Desafío para el Control No Lineal*, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, CEA-IFAC, 2005
- [2] G. Píriz Mira, J. García del Prado, L. Rodríguez Cid, *Topología de presas, Métodos de Auscultación*, Centro Universitario de Merida, Universidad de Extremadura, Julio de 20002
- [3] K. Ogata, *Teoría de Control y Sistemas Dinámicos*. (Cap. 3, Prentice Hall Hispanoamericana).
- [4] Karl J. Åström, Daniel J. Block y Mark W. Spong, *El péndulo con volante de inercia*, Departamento de Control Automático, Colegio de Ingeniería en Sistemas de Control y Laboratorios Científicos Coordinados, del Instituto Tecnológico de London, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign respectivamente, Cap. 1, 2001.
- [5] Spong, M.W., *Swing Up Control of the Acrobot Using Partial Feedback Linearization*, Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- [6] Block, Daniel J.; Spong, Mark W., *Mechanical Design and Control of the Pendubot*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996.
- [7] K. Ogata, *Teoría de Control y Sistemas Dinámicos*. ,Cap. 13, Prentice Hall Hispanoamericana.
- [8] QUANSER; Consulting Inc., *Mechatronics control kit*, Mechatronic Systems, Incorporated, 2002.