

Análisis y control de un péndulo invertido sobre base móvil

Roberto Murueta-Fortiz, Pablo Sánchez-Sánchez, Antonio Michua-Camarillo, Fernando Reyes-Cortés
W. Fermín Guerrero-Sánchez and J. Guillermo Cebada-Reyes

Universidad Autónoma de Puebla (F. C. E. & F. C. F. M.) - Robotics Team "oocelo"
lepable@ece.buap.mx, amc@ece.buap.mx, freyes@ece.buap.mx

Abstract - El objetivo principal de este artículo es obtener el modelo matemático de un péndulo invertido a través del *principio de potencias virtuales* y hallar las ecuaciones no lineales de movimiento usando la *forma de Cauchy* lo que nos permite obtener los puntos de equilibrio del sistema, que al ser linealizado alrededor del punto de equilibrio inestable, nos sirve para proponer un *control lineal optimal* para estabilizarlo alrededor de dicho punto. El modelo matemático obtenido es evaluado experimentalmente en el péndulo invertido digital de la empresa Feedback.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido es uno de los ejemplos más conocidos de sistemas para estabilizar, fue ampliamente estudiado por la industria aeroespacial, y hoy en día todavía es un problema importante de control, ya que cada vez hay más sistemas que pueden aproximarse con este modelo [1,2].

Además de la industria aeroespacial, el modelo del péndulo invertido tiene aplicaciones en diversas áreas de la ciencia como en la biotecnología donde se modelan diversos sistemas (caminadores bípedos, etcétera) [3]; ó en anatomía, donde la postura y la locomoción han encontrado mucha similitud con la dinámica del péndulo invertido, donde la posición del pie requiere del control de balance, considerando que el balanceo resulta de estirar los músculos, lo cual es un tipo de estabilización local por realimentación de la dinámica involucrada en la posición de pie [4]. Ahora bien, el interés sobre el problema local del péndulo invertido reside en la estabilización de una posición inestable en lazo abierto, lo cual constituye un problema de control notable que puede ser resuelto por métodos lineales, ya que en sistemas lineales la estabilización de un punto inestable en lazo abierto no ofrece gran problema, éstos aparecen cuando el sistema es no lineal [1].

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe la dinámica del prototipo realizando consideraciones que se utilizarán en la evaluación del sistema; se menciona el *principio de potencias virtuales*, se obtienen las ecuaciones de movimiento según la *forma de Cauchy* y se determinan los puntos de equilibrio para linealizar el sistema; en la sección 3 se detallan los parámetros del prototipo; en la sección 4 se describe el controlador lineal; y finalmente las conclusiones se puntualizan en la sección 5.

II. DINÁMICA DEL PROTOTIPO

El *péndulo invertido sobre base móvil* es un sistema formado por una varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada en una base tipo carro que se mueve sobre un riel rectilíneo horizontal bajo la acción de una

fuerza $u(t)$ paralela a la guía; esta fuerza $u(t)$ es la ley de control con la que se pretende controlar la posición de la varilla (figura 1) [1]. El péndulo rota sobre un plano vertical alrededor de un eje localizado en el centro de la base.

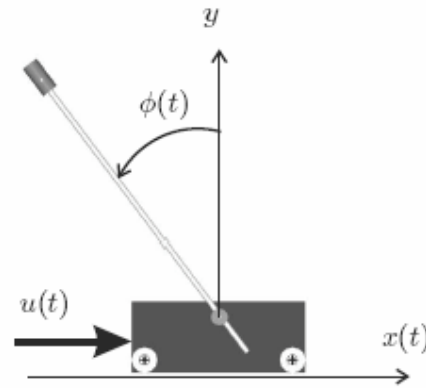


Fig 1. Péndulo invertido sobre base móvil.

Para efectos del análisis, consideraremos que el sistema *base-péndulo* es una estructura rígida, es decir, es un conjunto de partículas obligadas a permanecer a distancias relativas absolutamente fijas, hecho válido para situaciones prácticas [5].

Debido al contacto entre las ruedas del móvil y la superficie de la guía existe una fuerza de fricción que se opone al movimiento, sin embargo, considerando que la fricción es producida por un sólo contacto la restricción cinemática involucrada se puede modelar como en un unicycle [6].

Partiendo de esta consideración se procede a encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema, considerando que estamos ante un problema de cuerpo rígido con restricciones no holonómicas de la forma [7]:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j(t) + b_i(t) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

donde $q(t)$ es el vector de coordenadas generalizadas del sistema de n grados de libertad no constreñidos, que se reducen en número por las m ecuaciones de restricción no holonómicas.

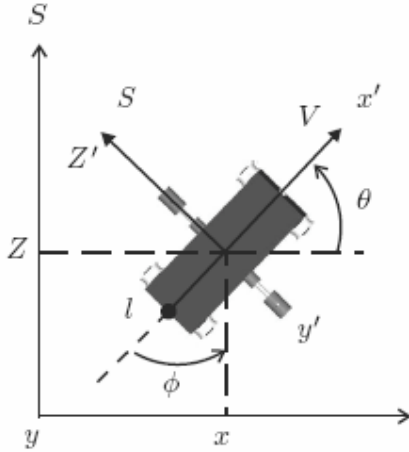


Fig 2. Vista superior.

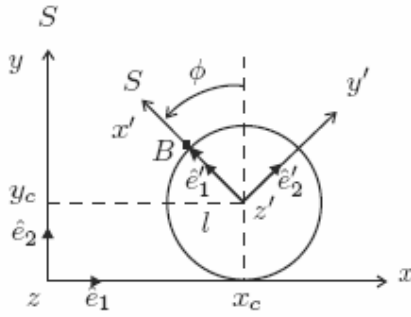


Fig 3. Esquema de proyecciones (vista lateral).

Si adaptamos el sistema base-péndulo (en lo sucesivo B-P) al modelo del unicyclo, tenemos que si la base móvil B es un punto en el eje x' que se elige con la misma dirección del péndulo y los ejes $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2\}$ están fijos al sistema con origen en el centro de masa del sistema como se muestra en las figuras 2 y 3. Las constricciones no holonómicas quedan como:

$$V_B \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad (2)$$

donde V_B es la velocidad en el punto B ubicado a una distancia l del centro de masa. Si denotamos la velocidad del centro de masa por $V_c = [v_1, v_2]^T$, y ϕ , como la posición angular del eje \hat{e}'_1 relativo al eje x , la restricción toma la forma de la ecuación escalar:

$$v_2 - l\dot{\phi} = 0 \quad (3)$$

II-A. Principio de Potencias Virtuales

El método de potencias virtuales tiene la ventaja de estar cercano a las leyes de Newton e implica el cálculo de fuerzas, aceleraciones y momentos. El principio de potencias virtuales

también conocido como *principio de Jourdain* es similar al principio de trabajos virtuales y afirma que las potencias virtuales de las fuerzas inerciales aplicadas en un sistema son cero [8]. Este tiene la ventaja de incorporar naturalmente las constricciones no holonómicas del sistema Jourdain (1905) y Kane (1961).

Las fuerzas que actúan en el sistema B-P a través del diagrama de fuerzas mostrado en la figura 4, en el cual vemos que hay una fuerza de fricción T_c que se opone al movimiento de la base móvil, la fuerza de reacción V del riel sobre el cual se mueve la base del péndulo V , el peso $(m_c + m_p)g$ del sistema, y la fuerza de control $u(t)$.

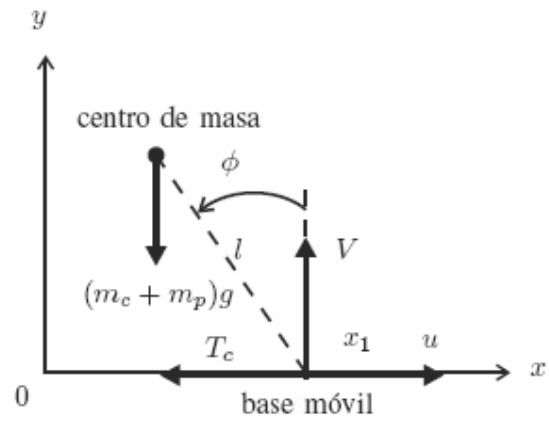


Fig 4. Diagrama de fuerzas del sistema B-P.

Para desarrollar el modelo matemático del sistema B-P es necesario definir los sistemas de referencia que se utilizarán en el análisis; se van a considerar dos sistemas de referencia; un sistema fijo S que ve moverse al sistema B-P y uno inercial S' que participa del movimiento del sistema B-P como se describe en la figura 3. La orientación de S' es tal que la velocidad lineal de la base se da a lo largo del eje x . Para fines del análisis se supone que en el sistema no hay movimiento en la dirección z lo que indica que los ejes z y z' permanecen paralelos todo el tiempo. Así de las tres coordenadas generalizadas sólo dos son independientes.

Hechas las consideraciones preliminares, se procede a obtener las ecuaciones de movimiento que determinan el comportamiento dinámico del sistema B-P, con este fin elegimos como coordenadas generalizadas a las descritas por el vector de velocidad $\dot{q}_i = \{v_1, v_2, \omega\}$, en este método de análisis las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$(M\dot{V}_c - \bar{F}^a) \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{q}_j} + (J\dot{\omega} - \bar{L}^a) \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (4)$$

donde $M = m_c + m_p$ es la masa total del sistema ubicada

en el centro de masa. La ecuación de constricción es:

$$V_c - l\dot{\omega} = f(v, \omega) = 0. \quad (5)$$

donde:

$$\vec{F}^a = \vec{u} - T_c + \vec{V} - \vec{P} \quad (6)$$

y

$$\vec{L}^a = \vec{l} \times \vec{F}^a \quad (7)$$

La ecuación (4) queda como:

$$\begin{aligned} & (M \dot{v}_1 \hat{e}_1 + \dot{v}_2 \hat{e}_2) \\ & - \left(\vec{u} - T_c + \vec{V} - \vec{P} \right) \cdot \frac{\partial (\dot{v}_1 \hat{e}_1 + \dot{v}_2 \hat{e}_2)}{\partial \vec{\omega}} \partial v_j = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

De esta manera si $j = 1$, y de acuerdo con la figura 4, tenemos que:

$$M \dot{v}_1 = M \ddot{x}_c = u - T_c. \quad (9)$$

Para el caso donde $j = 2$ tenemos:

$$M \dot{v}_2 = M \ddot{y}_c = V - P, \quad (10)$$

además, cuando $j = 2$ y de acuerdo con (5), (8) resulta:

$$\left(J \dot{\omega} - \vec{L}^a \right) \cdot \frac{\partial \hat{e}_3}{l} = 0 \quad (11)$$

Sustituyendo \vec{L}^a se obtiene:

$$J \dot{\omega} + Mgl \sin(\phi) = Vl \sin(\phi) + (u - T_c)l \cos(\phi) \quad (12)$$

El término $Mgl \sin(\phi)$ en la ecuación (12) es el torque que se opone al movimiento de rotación y se debe a una fuerza disipativa que surge durante el movimiento de rotación, este torque (denotado como D_p) producido por la fuerza disipativa

de tipo $k\dot{\phi}$, que se puede representar como módulo de la forma:

$$D_p = Mgl \sin(\phi) = c\dot{\phi} \sin(\phi) \quad (13)$$

donde $c = \frac{Mgl}{\dot{\phi}}$ es una constante, ó bien:

$$D_p = f_p \dot{\phi} \quad (14)$$

donde $f_p = c \sin(\phi)$. De manera que el resultado en función de ϕ queda de la forma:

$$J_1 \ddot{\phi} + f_p \dot{\phi} = Vl \sin(\phi) + (u - T_c)l \cos(\phi) \quad (15)$$

En resumen, las ecuaciones que describen la dinámica del sistema las obtenemos sustituyendo los valores de x_c y y_c (obtenidos en base a la figura 4) en las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, por lo que considerando la ecuación (12) y usado invariablemente $x_2 = \phi$ tenemos:

$$u - T_c = M \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - l \sin x_2) \quad (16)$$

$$V - Mg = M \frac{d^2}{dt^2} (l \cos x_2) \quad (17)$$

$$J \frac{d^2 x_2}{dt^2} + f_p \frac{dx_2}{dt} = Vl \sin x_2 + (u - T_c)l \cos x_2 \quad (18)$$

II-B. Ecuaciones de movimiento (forma de Cauchy)

Para expresar las ecuaciones de movimiento según la forma de Cauchy debemos eliminar V de las ecuaciones (17) y (18), así tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_2}{dt^2} \left(J + Ml^2 \sin^2(x_2) \right) \\ & + Ml^2 \sin(x_2) \left(\cos(x_2) \right) \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$-Mgl \sin(x_2) + D_p = (u - T_c)l \cos(x_2).$$

Partiendo de la ecuación (16) tenemos:

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} - Ml(\cos(x_2)) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ml(\sin(x_2)) \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = u - T_c \quad (20)$$

Las ecuaciones de movimiento (19) y (20) pueden ser expresadas como una ecuación diferencial matricial no lineal de segundo orden, esto es:

$$M'(x_2)\ddot{X} + C(x_2, \dot{x}_2)\dot{X} + G(x_2) = \tau(x_2, \dot{x}_2) \quad (21)$$

donde las variables X , \dot{X} y \ddot{X} son vectores definidos como:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

y los coeficientes $M'(x_2)$, $C(x_2, \dot{x}_2)$ y $G(x_2)$ son matrices de la forma:

$$M' = \begin{bmatrix} M & -Ml \cos(x_2) \\ 0 & J + Ml^2 \sin^2(x_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mgl \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & x_2^2 Ml \sin(x_2) \\ 0 & x_2^2 Ml^2 \sin(x_2) \cos(x_2) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

El par aplicado es un vector de la forma:

$$\tau = \begin{bmatrix} u - T_c \\ (u - T_c)l \cos(x_2) - D_p \end{bmatrix}. \quad (26)$$

La ecuación (11) está formada por los siguientes elementos: $M'(x_2) \in R^{n \times n}$ matriz que contiene los parámetros de inercia y es llamada *matriz de momentos de inercia* o simplemente *matriz de inercia*; $C(x_2, \dot{x}_2) \in R^{n \times n}$ matriz

que contiene tanto a los términos de fuerzas de Coriolis de la forma $\dot{x}_i \dot{x}_j$ como a los términos de fuerzas centrífugas de la forma \dot{x}_2^2 y se conoce como *matriz de Coriolis y fuerza centrípeta*; $G(x_2) \in R^{n \times 1}$ es el vector de *pares gravitacionales* y está formado por los términos asociados al peso de la varilla que generan momentos de fuerza en la articulación por la acción de la gravedad; y $\tau \in R^{n \times 1}$ representa al vector de pares y fuerzas externas producidas por el motor ubicado en la base móvil del péndulo [6]. Resolviendo para \ddot{X} en la ecuación (21) tenemos que:

$$\ddot{X} = M'(x_2)^{-1}(\tau - G(x_2) - C(x_2, \dot{x}_2)\dot{X}). \quad (27)$$

Puesto que la inversa de la matriz M' es distinta de cero y está definida, la solución de (27) es:

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} J + Ml^2 \sin^2(x_2) & Ml \cos(x_2) \\ 0 & M \end{bmatrix} \beta \quad (28)$$

donde β es un vector definido como:

$$\beta = \begin{bmatrix} u - T_c - Ml \sin(x_2) \dot{x}_2^2 \\ \left((u - T)l \cos(x_2) - \dot{x}_2^2 Ml^2 \sin(x_2) \cos(x_2) \right) \\ -f_p \dot{x}_2 + Ml \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Resolviendo el producto entre las matrices, reduciendo términos y separando el vector \ddot{X} en sus componentes, obtenemos:

$$\ddot{x}_1 = \frac{(a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin(x_2)))}{J + Ml^2 \sin^2(x_2)} \quad (30)$$

$$+ l \cos(x_2)(\mu g \sin(x_2) - f_p x_4))$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{(l \cos(x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin(x_2)))}{J + Ml^2 \sin^2(x_2)} \quad (31)$$

$$+ \mu g \sin(x_2) - x_4 f_p)(26)$$

donde $a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p}$ y $\mu = (m_c + m_p)l$.

Estas dos ecuaciones de segundo orden definen conjuntamente un sistema de cuarto orden, la ecuación puede reducirse más introduciendo los cambios de variables y en términos de las nuevas variables podemos escribir las ecuaciones anteriores como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (32)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (33)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{(a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin(x_2)))}{J + Ml^2 \sin^2(x_2)} + l \cos x_2 (\mu \sin(x_2) - x_4 f_p) \quad (34)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(l \cos(x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin(x_2)))}{J + Ml^2 \sin^2(x_2)} + \mu g \sin(x_2) - x_4 f_p \quad (35)$$

En forma compacta tenemos una expresión de la forma:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \quad (36)$$

con $i = \overline{1, 4}$.

II-C. Puntos de equilibrio del sistema

Intuitivamente sabemos que en el sistema B-P tenemos dos puntos de equilibrio, uno *estable* que está en la posición colgante, y otro *inestable* que se encuentra en la posición vertical deseada. Así los puntos de equilibrio de la ecuación (36) son las raíces de la ecuación:

$$f(x_i) = 0 \quad (37)$$

El sistema de ecuaciones (36) lo podemos reescribir como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{\Delta}(a(-\mu x_4^2 \sin(x_2)) + l \cos(x_2)(\mu \sin(x_2) - x_4 f_p)) \\ + \frac{1}{\Delta} a(u - T_c) \\ \frac{1}{\Delta}(l \cos(x_2)(-\mu x_4^2 \sin(x_2)) + \mu g \sin(x_2) - x_4 f_p) + \frac{1}{\Delta} l \cos(x_2)(u - T_c) \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde $\Delta = J + Ml^2 \sin^2(x_2)$.

Para el caso cuando $\tau = 0$, es decir, cuando tenemos un sistema *no controlable* cuya función $f(x)$ tiene puntos de equilibrio x_i^* tales que $f(x_i) = 0$, tenemos:

$$x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ n\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

II-D. Linealización del sistema

El siguiente paso consiste en linealizar el sistema de ecuaciones descrito en (38) alrededor del punto de equilibrio inestable x_1^* aplicando el *teorema de Taylor para varias variables* [9], obteniendo como resultado una expresión de la forma:

$$\dot{y}_j = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_j(x, u)|_{(x_{eq}, u_{eq})}}{\partial x_i} y_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial f_j(x, u)|_{(x_{eq}, u_{eq})}}{\partial u_i} u_i^* \quad (40)$$

con $j = \overline{1, 4}$, donde los términos:

$$\frac{\partial f_j(x, u)|_{(x_{eq}, u_{eq})}}{\partial x_i} \quad (41)$$

forman la j -ésima fila de una matriz (supongamos una matriz A) y el término:

$$\frac{\partial f_j(x, u)|_{(x_{eq}, u_{eq})}}{\partial u_i} \quad (42)$$

forman la j -ésima fila de otra matriz B ; de tal manera que la linealización resulta en una expresión del tipo:

$$\dot{y} = Ay + Bu \quad (43)$$

con $\dot{y} = (\dot{y}_1 \dots \dot{y}_4)$ y $y = (y_1 \dots y_4)$.

Evaluando las derivadas tenemos:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu l g}{J} & 0 & -\frac{l f_p}{J} \\ 0 & \frac{\mu g}{J} & 0 & -\frac{f_p}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{J} \\ \frac{l}{J} \end{bmatrix} u \quad (44)$$

III. DESCRIPCIÓN DEL PROTOTIPO

El sistema es un péndulo invertido con base móvil de la empresa *feedback* que se desplaza sobre un riel, figura 5, cuenta con su etapa de potencia y una computadora pentium IV a 2 GHz con doble procesador para realizar el control.

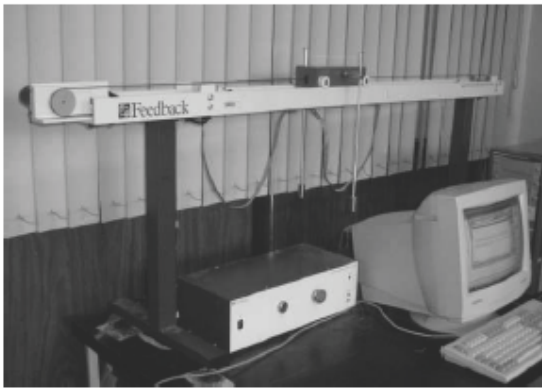


Fig 5. Péndulo invertido sobre base móvil U-339326 de *Feedback*

Los parámetros proporcionados por la empresa *Feedback*; fabricante del péndulo invertido $U-33936$; son los siguientes:

Tabla 1. Parámetros del fabricante

Constante	Unidades	Valor
Constante μ	$Kg \cdot m$	0.022830000
Constante de gravedad g	$\frac{m}{s^2}$	9.800000000
Momento de inercia J	$Kg \cdot m^2$	0.013923100
Fricción del péndulo f_p	$Kg \cdot \frac{m^2}{s}$	0.000107443
Constante a	m^2	0.010260000
Constante l	m	0.016790300
Fricción de Coulomb FC	N	2.531650000
Fricción estática FS	N	2.281330000

IV. DISEÑO DE UN CONTROL LINEAL

Para diseñar el controlador lineal optimal se utiliza el esquema propuesto en [10], suponiendo que se cuenta con el control para el desbalanceo, lo que resta es encontrar un control para estabilizar el péndulo en el origen. Sustituyendo los valores de la tabla I en la ecuación (45) tenemos:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1(1) \\ 0 & 0.27681527 & 0 & -1.3291 \times 10^{-4}(2) \\ 0 & 16.48661866 & 0 & -0.0079156(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2(4) \\ y_3(5) \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0(6) \\ 0(7) \\ 0.7560635(8) \\ 1.23699119(9) \end{bmatrix} u \quad (45)$$

La estructura de la ley de control que se propone es la siguiente:

$$u = -Ky(t) \quad (46)$$

La matriz de ganancias K la podemos construir usando el programa *Matlab*, para lo cual usamos la instrucción: $K=1qr(A,B,Q,R)$, ya que conocemos A y B y las

matrices Q y R las elegimos como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R = [1] \quad (47)$$

así tenemos:

$$K = [-0.999937.3140 - 2.42799.26838] \quad (48)$$

Por lo tanto la ley de control según la ecuación (46) es:

$$u = -[-0.999937.3140 - 2.42799.2683] y \quad (49)$$

al sustituir la ecuación (45) en la ecuación (46) resulta $\dot{y} = (A - BK)y = G'$, donde:

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.756 & -27.9349 & 1.8357 & -7.0073 \\ 1.2369 & -29.6705 & 3.0033 & -11.4728 \end{bmatrix} \quad (50)$$

los eigenvalores de G' son:

$$\begin{aligned} &[-4.7196 - 3.5017 - 0.7078 + 0.4821i \\ &-0.7078 - 0.4821i] \end{aligned} \quad (51)$$

estos eigenvalores tienen parte real negativa, de modo que el sistema dinámico B-P alrededor del punto de equilibrio $y_{eq} = [0000]^T$, tienen comportamiento asintóticamente estable en concordancia con el criterio de Hurwitz [11]. Si sustituimos la ley de control (49), en el sistema de ecuaciones no lineal original (38) usando el modelo de fricción de acuerdo a [12] con coeficientes que aparecen en la tabla I y se grafica considerando condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, por ejemplo ($x_1 = 0, x_2 = 0.1, x_3 = 0, x_4 = 0$) podremos visualizar el comportamiento del sistema alrededor de dicho punto (figura 6).

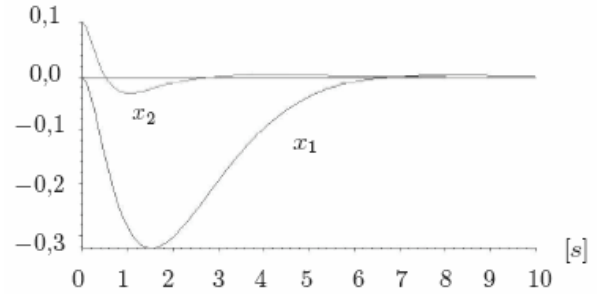


Fig 6. Simulación del modelo.

V. CONCLUSIÓN

Como podemos ver de la figura (1), que la respuesta del sistema corresponde a un movimiento deseado y tiende a alcanzar el equilibrio en un tiempo razonablemente pequeño. Podemos concluir que con el análisis planteado y el control propuesto ubicado en la vecindad del punto de equilibrio inestable, la respuesta del sistema es satisfactoria.

REFERENCIAS

- [1] J. Aracil, F. Gordillo, *El Péndulo Invertido: Un Desafío para el Control No Lineal*, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, CEAI-FAC, 2005
- [2] G. Píriz Mira, J. García del Prado, L. Rodríguez Cid, *Topología de presas, Métodos de Auscultación*, Centro Universitario de Mérida, Universidad de Extremadura, Julio de 20002
- [3] K. Ogata, *Teoría de Control y Sistemas Dinámicos*. (Cap. 3, Prentice Hall Hispanoamericana).
- [4] Karl J. Amstrong, Daniel J. Block y Mark W. Spong, *El péndulo con volante de inercia*, Departamento de Control Automático, Colegio de Ingeniería en Sistemas de Control y Laboratorios Científicos Coordinados, del Instituto Tecnológico de London, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign respectivamente, Cap. 1, 2001.
- [5] Jerry B. Marion, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*, Cap.12, Pags. 409-58, Revert'e,S.A., España, 1984.
- [6] Patricia Mellodge, *Abstracción de Modelos en Sistemas Dinámicos: Aplicación a Control de Robots Móbiles*, Tesis Doctoral, Instituto Tecnológico de Virginia, 2007
- [7] Herbert. Goldstein, Charles Poole y John Saftko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 3ra. edición, Cap. 2, San Francisco, 2002.
- [8] Ronald L. Huston, C. Q. Liu, *Formulas for Dynamic Analysis*, CRS Press, Chapter 10, 2001.
- [9] Watson Fulks, *ADVANCED CALCULUS, An Introduction Analysis.*, John Wiley & Sons Inc., Cap. 10, Pg. 230-31, EEUU, 1969.
- [10] Mark W. Spong, *Swing Up Control of the Acrobot Using Partial Feedback Linearization*, Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- [11] V. V. Alexandrov, S. I. Zlochevskii, R. Reyes Sánchez, H. Salazar Ibargdotuen, *Introducción a la Modelación Matemática de los Sistemas Controlables.*, Cap. 2, Pag. 47, BUAP, Puebla, 2000.
- [12] Rafael Kelly y Víctor Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores.*, PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Pg. 281-283, Madrid, 2003.