

Identificación paramétrica de un péndulo invertido (simulación y evaluación)

Shared Santamaria-Castillo, Pablo Sánchez-Sánchez, Fernando Reyes-Cortés, Antonio Michua-Camarillo,
Vladimir V. Alexandrov y Gabriel Romero-Rodríguez

Universidad Autónoma de Puebla (F. C. E. & F. C. F. M.) - Robotics Team "oocelo"
lepable@ece.buap.mx, freyes@ece.buap.mx, amc@ece.buap.mx

Abstract - El objetivo de este artículo es describir el procedimiento utilizado para identificar los parámetros de un prototipo de la empresa *Feedback* (péndulo invertido) mediante el uso de leyes básicas de física. Evaluando los parámetros de forma simulada y experimental aplicando una señal de excitación persistente.

la sección 3 se describen las características físicas del prototipo, así como los parámetros del sistema, información que mediante procesos de simulación van describiendo los parámetros deseados; comparando los valores reales con los valores simulados; y finalmente las conclusiones se puntualizan en la sección 4.

I. INTRODUCCIÓN

En las diferentes áreas de investigación, muchas veces surge la necesidad de cuantificar relaciones entre variables en un intento de interpretar el comportamiento de una de ellas en función de las otras. Este tipo de análisis generalmente se hace utilizando modelos lineales y en particular modelos de regresión y análisis de varianza. Dicha clase de modelos suponen que la respuesta siempre es continua y en general normalmente es distribuida con varianza y media constante. Sin embargo, cuando la respuesta es discreta el modelo lineal ya no funciona. Ante esta limitación, Nelder y Wedderburn extendieron la teoría de los modelos lineales a una familia más amplia a la que denominaron *modelos lineales generalizados* [1]. En estos modelos para realizar el ajuste de curvas se requieren de n puntos en pareja de números:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad (1)$$

que nos sirven para determinar una función $f(x)$ tal que $f(x_j) \approx y_j$ donde $j = 1, 2, \dots, n$. El tipo de función puede ser sugerida por la misma naturaleza del problema y en muchos casos resultará apropiado el uso de un polinomio de cierto grado. Si se requiere la igualdad estricta, es decir $f(x_j) = y_j$, y se utilizan polinomios de grado suficientemente elevado puede aplicarse algún método numérico para obtener la solución, sin embargo existen situaciones en las que ésta no sería la solución apropiada del problema real, por lo que la estimación de parámetros basada en los modelos lineales generalizados ofrece una alternativa sencilla [2].

Es importante considerar que el modelo dinámico, independientemente del espacio en el que se decida trabajar, describe el comportamiento de un sistema a cualquier estímulo, siendo uno de sus principales objetivos el detallar matemáticamente el comportamiento de un prototipo, por lo cual es necesario conocer el valor de los componentes de dicho modelo, haciéndose necesario el uso de métodos de identificación de parámetros.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se aborda el concepto de *identificación paramétrica* realizando consideraciones que se utilizarán en la evaluación del sistema; en

II. IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA

La teoría de control ofrece herramientas tales como esquemas adaptables y controladores robustos, que permiten tolerar incertidumbres en los parámetros dinámicos [2]. Sin embargo, debido al interés de poder controlar adecuadamente un robot resulta necesario conocer sus parámetros dinámicos en razón a tres objetivos generales [2,3]:

- Estudio preliminar de un proceso de aplicación; ya que empleando software de simulación, se puede realizar una estimación inicial de algunas variables del controlador o del modelo.
- Diseño de controles basados en el modelo dinámico del robot debido a que el comportamiento y robustez de estos esquemas dependen de la exactitud de los parámetros.
- Uso del modelo obtenido como parte de un algoritmo de control, generalmente haciendo las veces de un predictor de salidas futuras.

Por otra parte tenemos dos opciones a considerar en el proceso para la obtención de los parámetros [2,3]:

- *Fuera de línea*, esta opción permite obtener los parámetros dinámicos del robot empleando diferentes esquemas considerando que dichos parámetros son constantes.
- *En línea*, cuando son obtenidos los parámetros dinámicos mediante actualización en cada período de muestreo, de un modelo cuya estructura ha sido previamente definida. Este enfoque permite aplicar métodos de control adaptivo, donde, en ocasiones los ajustes no se realizan en los parámetros dinámicos propiamente sino en algún parámetro del control empleado.

El término *identificación paramétrica* podría ser definido como el conjunto de estudios, teorías y algoritmos que permiten obtener los parámetros dinámicos de un modelo matemático, generalmente dinámico, que produce con suficiente exactitud, las variables de salida del sistema real ante el mismo conjunto de entradas aplicadas. La identificación paramétrica ha generado varios esquemas de identificación que se han convertido en una herramienta atractiva para determinar los parámetros dinámicos del robot cuando existe dificultad para medirlos directamente. Sin embargo, la naturaleza continua, no lineal, multivariable y fuertemente acoplada del modelo dinámico hace que la tarea de identificación no sea trivial. La obtención de los parámetros físicos de un sistema dinámico se pueden adquirir haciendo uso

de diversos métodos recursivos como el *método de mínimos cuadrados* [2].

III. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

En este artículo se obtiene el modelo de un péndulo invertido haciendo uso de la *metodología de Euler-Lagrange*; comparando este modelo con el reportado por la empresa Feedback calculado por la *metodología de Newton*. Debemos de tener en cuenta que el péndulo invertido tiene diferentes aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, ya que muchos sistemas físicos y biológicos se modelan en base a este esquema.

El *péndulo invertido sobre base móvil* es un sistema formado por una varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada en una base tipo carro que se mueve por la influencia de un motor sobre un riel rectilíneo horizontal (figura 1). El péndulo rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en el centro de la base.

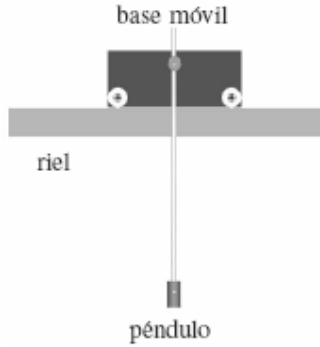


Fig. 1. Péndulo invertido sobre base móvil.

Las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido sobre base móvil son las siguientes:

$$M'(x_2)\ddot{X} + C(x_2, x_2)\dot{X} + G(x_2) = \tau(x_2, x_2) \quad (2)$$

donde las variables son:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

y los coeficientes M' , G y C están definidos como:

$$M' = \begin{bmatrix} M & -Ml \cos(x_2) \\ 0 & J + Ml^2 \sin^2(x_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mgl \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & x_2^2 Ml \sin(x_2) \\ 0 & x_2^2 Ml^2 \sin(x_2) \cos(x_2) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Siendo el par aplicado el siguiente vector:

$$\tau = \begin{bmatrix} u - T_c \\ (u - T_c)l \cos(x_2) - D_p \end{bmatrix}. \quad (7)$$

La ecuación (2) está formada por los siguientes elementos:

$M'(x_2) \in R^{n \times n}$ matriz que contiene los parámetros de inercia y es llamada *matriz de momentos de inercia* o simplemente *matriz de inercia*; $C(x_2, \dot{x}_2) \in R^{n \times n}$ matriz que tiene tanto a los términos de fuerzas de Coriolis de la forma $\dot{x}_i \dot{x}_j$ como a los términos de fuerzas centrífugas de la forma \dot{x}_2^2 y se conoce como *matriz de Coriolis y fuerza centrípeta*; $G(x_2) \in R^{n \times 1}$ es el *par gravitacional* y está formado por los términos asociados al peso de la varilla que generan momentos de fuerza en la articulación por la acción de la gravedad; y $\tau \in R^{n \times 1}$ representa las fuerzas generalizadas producidas por el motor en la base móvil del péndulo y es conocido como *par aplicado*.

III-A. Parámetros del motor

En esta sección obtendremos por métodos clásicos tanto los parámetros del sistema base-péndulo como los parámetros del motor. El modelo matemático que representa al motor, es el descrito por la siguiente ecuación [4]:

$$\tau = J \ddot{q} + b \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) \quad (8)$$

donde b es la fricción viscosa, f_c es la fricción de Coulomb y J el momento de inercia.

Hallaremos el valor de los parámetros del sistema por dos métodos, el primero es implementando un *control de posición* del cual obtenemos b y J ; en el segundo utilizamos un *control de velocidad* hallando b y f_c ; valores que se simulan y se comparan con datos experimentales.

III-A.1.. Primer método: control de posición

Al despreciar la fricción de Coulomb la función de transferencia de un motor se puede escribir como:

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}, \quad (9)$$

lo que nos permite implementar el sistema de control de posición en lazo cerrado con una ganancia proporcional k_p , figura 2, sistema descrito por una función de transferencia de la forma [5]:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p}{Js^2 + Bs + k_p} \quad (10)$$

que es igual a la ecuación:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (11)$$

donde w_n es la frecuencia natural no amortiguada; ζ es el factor de amortiguamiento relativo; $w_n^2 = \frac{k_p}{J}$; $2\sigma = 2\zeta$;

$w_n = \frac{B}{J}$; y σ es el factor de atenuación.

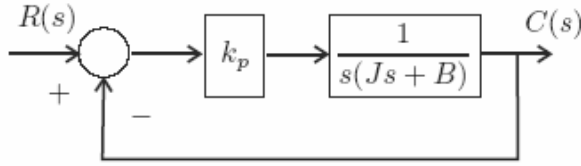


Fig. 2. Diagrama a bloques del control de posición (motor).

La respuesta del sistema descrito en la figura 2 a una entrada escalón unitario para el caso subamortiguado ($0 < \zeta < 1$) es:

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)s} \quad (12)$$

cuya transformada inversa de Laplace es:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[\cos(w_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(w_d t) \right] \quad (13)$$

donde $w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

El tiempo de retardo t_d es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso. Basándonos en el hecho de que cuando $t = t_p$ la derivada $\frac{dc}{dt}$ es igual a cero, podemos resolver el sistema y obtener:

$$t_p = \frac{\pi}{w_d} \quad (14)$$

y como $w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$, entonces:

$$w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (15)$$

Por otra parte, el sobrepaso máximo M_p se presenta en el

tiempo pico o en $t = t_p = \frac{\pi}{w_d}$, por lo tanto

$M_p = c(t_p) - 1$, y así tenemos:

$$\zeta = \frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}. \quad (16)$$

Al calcular los valores de w_n y de ζ , ecuaciones (15) y (16) respectivamente, obtenemos los parámetros:

$$J = \frac{k_p}{w_n^2} \quad (17)$$

$$B = 2\zeta w_n J \quad (18)$$

Al considerar los valores obtenidos, ecuaciones (17) y (18), y el diagrama de la figura 2, podemos implementar una entrada tipo escalón unitario a una ganancia $k_p = 1$ para obtener los siguientes valores:

Tabla 1. Valores a $k_p = 1$

t_p	0.08500000
w_d	36.9599000
ζ	0.25170000
J	0.00068568
B	0.01320000

Graficando los valores de la tabla I tenemos:

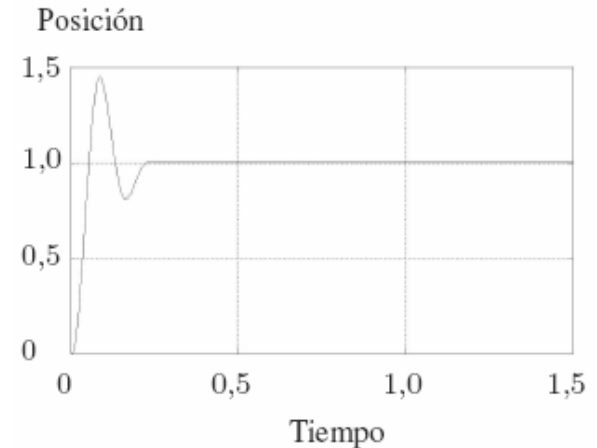


Fig. 3. Respuesta al escalón unitario.

El siguiente paso es realizar una comparación entre los valores obtenidos (tabla I) y los datos reales, figura 4.

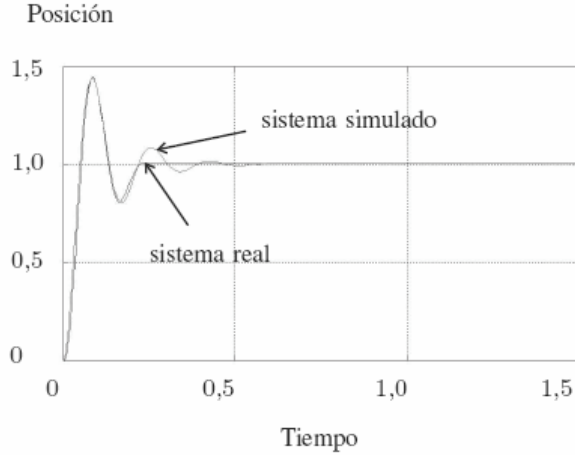


Fig 4. Comparación entre el sistema real y el sistema simulado

III-A.2. Segundo método: control de velocidad

Si construimos un sistema de control de velocidad en lazo cerrado, el sistema estará representado por:

$$I\ddot{q} + b\dot{q} + f_c \operatorname{sgn}(\dot{q}) = k_p (\dot{q}_d - \dot{q}) \quad (19)$$

donde k_p es la ganancia proporcional y \dot{q}_d es la velocidad angular deseada. Si suponemos que la velocidad es positiva, aplicando la transformada de laplace y despejando $\dot{q}(s)$ obtenemos:

$$\dot{q}(s) = \frac{k_p \dot{q}_d - f_c}{Is + b + k_p} \quad (20)$$

de esta forma la velocidad en estado estacionario en un tiempo infinito, está representado por:

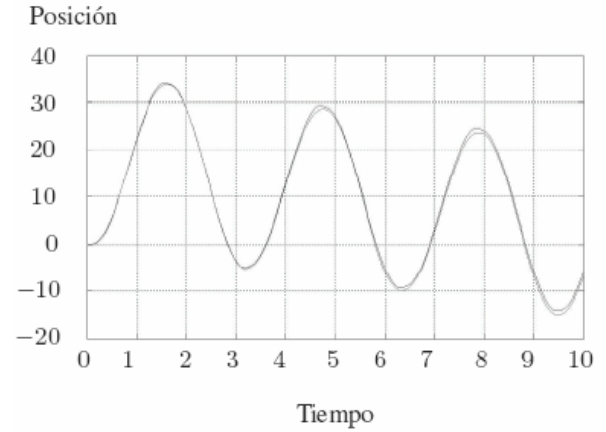
$$\dot{q}_\infty(s) = \frac{k_p \dot{q}_d - f_c}{b + k_p} \quad (21)$$

depejando esta ecuación y obteniendo por lo menos dos valores de q_d y q_∞ podemos obtener los valores de b y de f_c . Aplicando este método a nuestra planta para valores positivos y negativos encontramos los siguientes valores de estos parámetros:

1. Valores de b y f_c

b_+	0.012
b_-	0.0131
f_{c+}	0.022
f_{c-}	-0.016

en la figura 1 se muestra una imagen donde se compara la grafica real y la simulada de la posición del sistema al aplicarse una señal de entrada $\tau = 0.5 \sin(4t)$



1. Respuesta del sistema a la onda senoidal

III-B. Parámetros del sistema base-péndulo

A continuación se detallan los parámetros del sistema base-péndulo, figura 1; analizando sus características más importantes.

III-B.1. Fricción de la base

El método que se utiliza para caracterizar esta variable está basado en la segunda ley de Newton ($f = ma$). Si suponemos que la base móvil no tiene fricción, la fuerza f de entrada sería igual a la fuerza que está presente en la base, esto es ma ; pero al tomar en cuenta la fricción T la fuerza presente es la fuerza aplicada f menos la fuerza de fricción ($f - T = ma$). Si conocemos la masa m , la aceleración a y la fuerza aplicada f podemos despejar el valor de la fricción:

$$T = f - ma. \quad (22)$$

El diagrama a bloques de la figura 2 representa el sistema real en lazo abierto, donde s_0 es una señal de entrada sin unidades, la fuerza que es aplicada al motor es $k_0 k_1 s_0 = k s_0$ donde $k = k_0 k_1$.

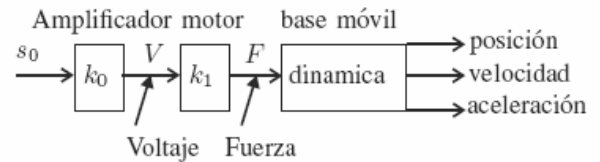


Fig. 6. Sistema en lazo abierto

El experimento consiste en aplicar una fuerza $f = k s_0$ para obtener los datos de aceleración y conociendo el valor de la masa

de la base móvil poder obtener los valores de la fricción:

$$T = ks_0 - ma \quad (23)$$

donde T es la fricción calculada.

En la primera parte del experimento se aplica una señal $s_0 = 0.3$ t y otra $s_0 = -0.3$ t; donde el tiempo t está definido en el siguiente rango $0 \leq t \leq 3$; por lo tanto, podemos obtener aceleraciones positivas y negativas, y calcular $T = s_0 - ma$ donde $m = 1.19$ kg .

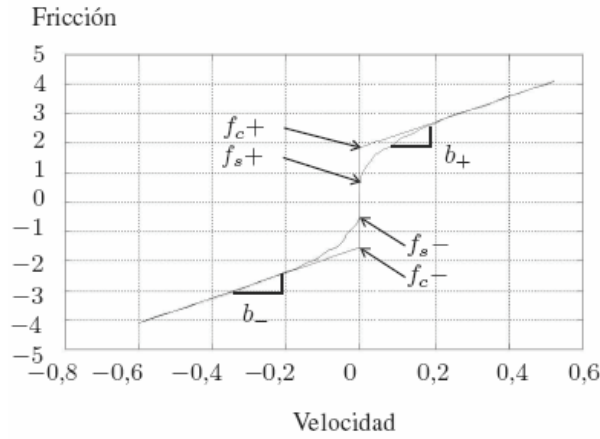


Fig. 7. Datos experimentales (fricción contra velocidad)

La figura 7 muestra la grafica obtenida de velocidad contra fricción, donde gráficamente se aproximan los valores de los parámetros de la fricción. Los valores que se utilizaron se obtuvieron por interpolación, tabla III.

Tabla III. Parámetros de fricción por interpolación

b_+	4.267
b_-	4.228
f_{c+}	1.867
f_{c-}	-1.58
f_{s+}	0.700
f_{s-}	0.900

Mediante un proceso de iteración se ajustaron los valores del sistema según las necesidades estructurales del sistema.

Tabla IV. Parámetros de fricción (calculados)

b_+	4.267
b_-	4.228
f_{c+}	2.000
f_{c-}	-1.27
f_{s+}	0.700
f_{s-}	0.900

Los datos obtenidos por la evaluación se pueden simular y comparar con los datos reales, figura 8.

Desplazamiento lineal

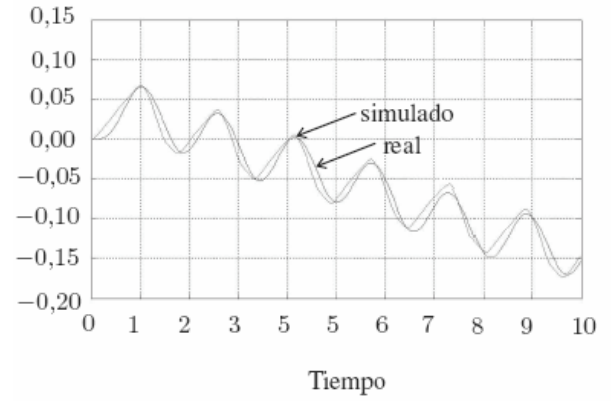


Fig 8. Simulación y datos reales de la base móvil

III-B.2. Momento de Inercia

El siguiente parámetro que se analiza es el momento de inercia específicamente del péndulo, que está definido como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{I_0} \sin(\theta) = 0. \quad (25)$$

Si θ ; en la ecuación (24); es pequeña podemos aproximar la ecuación como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{I_0} \theta = 0. \quad (25)$$

la ecuación (25) describe la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple. El momento de inercia con respecto al centro de masa de una varilla está definido como:

$$I_c = \frac{1}{12} mL^2 \quad (26)$$

Al realizar los respectivos cálculos matemáticos tenemos que el período está definido como:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + x^2}{gx}} \quad (27)$$

donde:

$$R^2 = \frac{L^2}{12}. \quad (28)$$

III-C. Método de mínimos cuadrados

La estimación por el *método de mínimos cuadrados* es una técnica básica para la evaluación de los parámetros de un sistema. Este método es particularmente simple si el modelo tiene la propiedad de ser lineal en relación a sus parámetros, además de su indudable visión intuitiva posee propiedades estadísticas muy útiles y sobre todo, permite la búsqueda de una forma recursiva lo suficientemente simple. Considérese el siguiente modelo de regresión lineal:

$$y(k) = \psi(k)^T \theta, \quad (29)$$

donde $y(k)$ representa la salida escalar, $\psi(k)$ es el vector del regresor que contiene funciones conocidas y θ es el vector de parámetros desconocidos. El modelo es indexado con respecto a la variable k , variable que indica el tiempo de muestreo, se asume que el tiempo de muestreo es discreto.

Partiendo de este método, se eleva al cuadrado la fórmula del período del péndulo compuesto, ecuación (25):

$$P^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{g} x^{-1} + \frac{4\pi^2}{g} x \quad (30)$$

obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$y = \frac{a}{x} + bx = P^2 \quad (31)$$

$$a = \frac{4\pi^2 R^2}{g} \quad (32)$$

$$b = \frac{4\pi^2}{g} \quad (33)$$

Para calcular los valores de a y b , ecuaciones (32) y (33) respectivamente, es necesario realizar una tabla de valores x_i y períodos y_i que se ajusten a los datos experimentales, para construir la tabla medimos el período P_i de péndulo para cada

posición x_i , completando la tabla con n pares de datos.

Tabla V. Parámetros para calcular a y b

Distancia(x)	Período(y)
1	2.224700
4	1.173200
5	1.049375
6	1.006800
10	0.942900
15	0.961800
20	1.015700
23	1.046100
25	1.079800
27	1.107300

Si (x_i, y_i) son las coordenadas de un dato experimental, a la abscisa x_i corresponde a la ordenada $y = ax_i + bx_i$, cuya diferencia es:

$$d_i = y_i - \frac{a}{x_i} + bx_i. \quad (34)$$

El criterio para calcular los parámetros a y b es calcular los valores que hacen que la suma:

$$S(a, b) = \sum_0^{N-1} d_i^2 = \sum_0^{N-1} \left(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i \right)^2 \quad (35)$$

sea mínima, es decir, aplicar el *principio de mínima acción*:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad (36)$$

Así tenemos que los valores de a y b son:

$$b = \left(\sum_0^{N-1} y_i x_i \right) - \left(\sum_0^{N-1} 1 x_i^2 \right) \left(\sum_0^{N-1} y_i x_i \right) N^2 - \left(\sum_0^{N-1} x_i^2 \right) \left(\sum_0^{N-1} 1 x_i^2 \right) \quad (37)$$

$$a = \left(\sum_0^{N-1} y_i x_i \right) - \left(\sum_0^{N-1} x_i^2 \right) b N \quad (38)$$

De la ecuación (32) podemos obtener el valor de R^2 , y de (26) y (28) obtenemos el momento de inercia en el centro de masa del sistema:

$$I_c = \frac{m a g}{4\pi^2}. \quad (39)$$

Y aplicando el *teorema de Steiner* obtenemos el momento de inercia con respecto del eje de giro encontramos el centro de gravedad de la varilla:

$$I = I_c + m x^2. \quad (40)$$

Considerando los valores de la tabla 5 y los datos experimentalmente se obtienen los valores de a y b .

$$\begin{aligned} a &= 0.0489 \\ b &= 3.8695 \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo los valores de a y b , (37) y (38), y en la ecuación (31) obtenemos la ecuación que representa el período:

$$y = \sqrt{\frac{a}{x}} + b x. \quad (42)$$

Sustituyendo los valores numéricos de a y b podemos realizar la siguiente comparación gráfica.

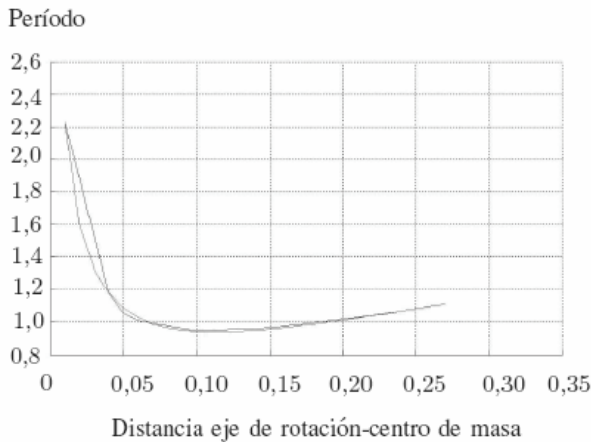


Fig 9. Curva que describe la relación período-distancia

Ahora bien, considerando que la masa del péndulo es 0.2721 kg ; y la gravedad 9.8 m/s^2 ; podemos sustituir estos valores en la ecuación (39) y obtener el valor del momento inercial con respecto al centro de masa:

$$I_c = 0.0033 \quad (43)$$

Como la distancia del eje de giro al centro de masa es de $x = 0.28$, aplicando la ecuación (40) hallamos el momento

inercial con respecto al eje de giro

$$I_o = 0.0246 \quad (21)$$

Sustituimos los valores encontrados en la ecuación (24) y simulamos considerando las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ \dot{q} &= 0 \\ \ddot{q} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Por otra parte, se ubica el péndulo a 90° de la posición de equilibrio lo que origina la condición de oscilación, la comparación grafica entre el sistema real y el simulado se ilustran en la siguiente figura.

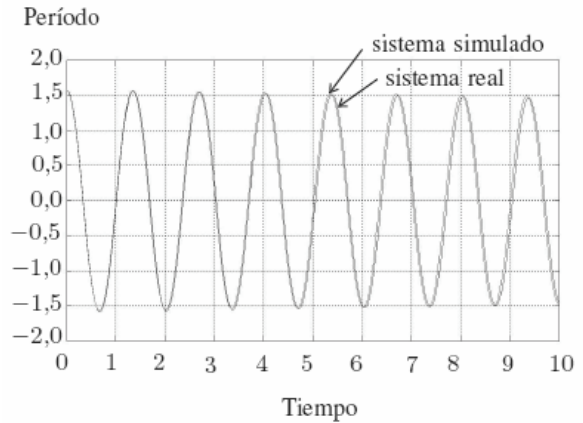


Fig 10. Comparación entre el sistema real y simulado

El valor obtenido de los parámetros del sistema péndulo invertido sobre base móvil son los siguientes:

Tabla VI. Parámetros del sistema

Parámetro	Valor
M	1.462
L	0.016
I_0	0.024
b_+	4.200
b_-	4.120
f_{c+}	1.260
f_{c-}	1.604
f_{s+}	0.700
f_{s-}	1.000

Los valores presentados en la tabla VI se evalúan aplicándole al sistema una señal de excitación persistente de forma senoidal, obteniendo las siguientes gráficas.

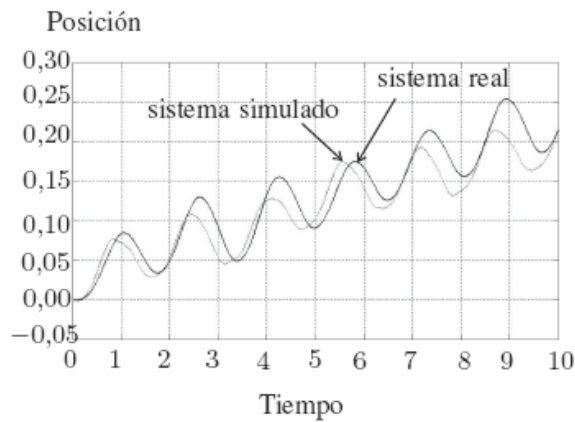


Fig. 11. Gráfica de posición

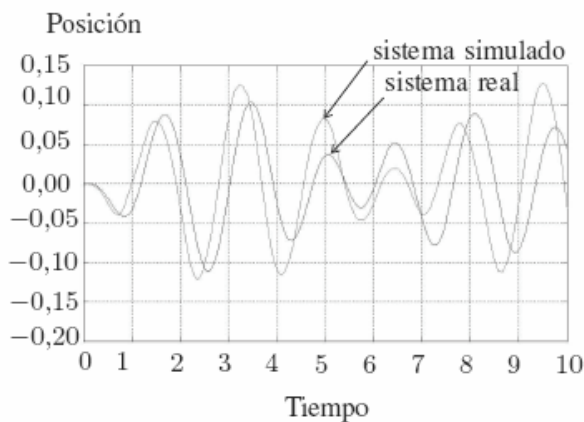


Fig. 12. Comparación de la posición angular

IV. CONCLUSIÓN

Como se puede observar, el método presentado en este artículo nos permite identificar los parámetros de un sistema, en nuestro caso específico un sistema péndulo invertido sobre base móvil, para sustentar un modelo dinámico y simular el comportamiento del sistema. Hay que recalcar que los parámetros del motor cambian conforme el tiempo evoluciona debido a las condiciones estructurales del sistema, y las características de la fricción, esta variación llegan a un valor constante.

REFERENCIAS

- [1] J. Juang, *Applied System Identification*, (New York: Prentice Hall, 2003).
- [2] P. Eyhoff, *System Identification Parameter and State Estimation*, (New York: John Wiley and Sons, 1974).

- [3] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987).
- [4] B. De Jager and J. Banens, Experimental evaluations of robot controllers, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, USA, 1994, 363-368.
- [5] Katsuhiko Ogata, *Teoría de Control y Sistemas Dinámicos*, Prentice Hall Hispanoamericana; pp 141-154 y 925-933.