

MODELACIÓN UN ROBOT PARALELO TIPO RRR USANDO NÚMEROS COMPLEJOS

* Eusebio Jiménez López
Francisco Cuenca Jiménez
** Luis Reyes Ávila
*** Juan José Delfín Vázquez
*** Efrén Ruiz Ruelas

ejimenezl@msn.com
Fracuenc@itesm.mx
lreyesa@citlali.imt.mx
definjuan@hotmail.com
efrenruelas@hotmail.com

* División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Sección Mecánica
Cd. Universitaria, México, D.F., C.P. 04510, Apdo. Postal 70-256 Fax 56223008

** Instituto Mexicano del Transporte.

*** Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, Ciudad Obregón Sonora.

Resumen

Este artículo presenta el modelado cinemático de posicionamiento de un robot paralelo tipo RRR usando el álgebra de los números complejos. Se analizan dos configuraciones asociadas con el robot: 1) la no deformada y 2) la deformada. En ambas configuraciones se analizan y se formulan los problemas cinemáticos directo e inverso. El sistema de ecuaciones e incógnitas para el problema directo fue de 10×10 , en tanto para el problema inverso dicho sistema fue de 12×12 . Los modelos obtenidos fueron programados en el paquete de programación VISUAL BASIC V6.

Palabras clave: Análisis de trayectoria, primitivas de manufactura, modelación, polinomios de suavización.

Introducción

Muchas de las tareas que tradicionalmente realizaba el ser humano han sido sustituidas por robots. Originalmente, el robot industrial fue concebido para tareas de manipulación de alto riesgo como el transporte de materiales radioactivos o para desarrollar actividades en medios ambientes hostiles. En la actualidad los robots industriales pueden realizar diversas tareas, por ejemplo: manipulación de piezas, operaciones de ensamble y soldadura, cortes, pintura e inspección entre otras [1]. Un sistema mecánico robótico compuesto de cadenas abiertas es conocido "manipulador serial" [2]. Si integra cadenas abiertas y cerradas es llamado "compuesto". Un manipulador en el cual, el primero y último eslabón están conectados por un número finito de subcadenas cinemáticas (combinación de cadenas abiertas y/o cerradas) es conocido como "parcialmente paralelo". Si cada subcadena es activada por rotación o traslación de un sólo actuador, entonces el

manipulador es llamado "totalmente paralelo". Un ejemplo de este tipo de manipulador es la llamada "plataforma Stewart" [2],[3].

Un manipulador serial posee gran flexibilidad para realizar diversas tareas, así como un área de trabajo mayor que los robots paralelos. Sin embargo, en operaciones de maquinado tales como esmerilado y taladrado en las cuales, se requiere de una rigidez alta, los robots seriales no pueden ser aplicados debido a que su estructura está en cantilever, en cambio, un robot paralelo si puede proporcionar la rigidez necesaria para realizar dichas operaciones [4]. Por otro lado, los modelos cinemáticos de los robots manipuladores seriales difieren de los modelos asociados con los robots paralelos. En los primeros, el planteamiento y solución de la cinemática inversa es relativamente menos complicado que para los segundos. Para el caso del problema directo, es lo contrario [5].

Un robot paralelo es un mecanismo de cadena cerrada constituido por un órgano terminal de "n" grados de libertad y una base fija unidos entre sí por cadenas cinemáticas independientes. Cada cadena consta a lo mucho de dos segmentos articulados. La conexión entre los dos segmentos debe ser por una junta de un grado de libertad. El movimiento del mecanismo es efectuado por "n" actuadores simples, uno por cada cadena [6].

En este artículo se modela las ecuaciones de posición de un robot paralelo planar de tres grados de libertad usando la rotación usual definida en espacio vectorial de números complejos [7]. Son analizadas dos configuraciones del robot : 1) la no deformada o también llamada "de referencia" y 2) la deformada [8]. En cada configuración se formulan los problemas cinemáticos directos e inversos.

La metodología que será utilizada en este artículo es la siguiente: 1) Caracterizar el robot paralelo. 2) Construir las ecuaciones de posición en la configuración de referencia usando la rotación usual para la formulación del problema inverso. 3) Formular el problema cinemático inverso en la configuración no deformada. 4) Construir las ecuaciones de posición en la configuración de referencia usando la rotación usual para la formulación del problema directo. 5) Formular el problema cinemático directo en la configuración no deformada. 6) Construir las ecuaciones de posición en la configuración deformada usando la rotación usual para la formulación del problema inverso. 7) Formular el problema cinemático inverso en la configuración deformada. 8) Construir las ecuaciones de posición en la configuración deformada usando la rotación usual para la formulación del problema directo. 9) Formular el problema cinemático directo en la configuración deformada. 10) Programar y simular las ecuaciones generadas en VISUAL BASIC V6.

El manipulador motivo de estudio, ha sido investigado en [9]. Es importante señalar que, por razones de espacio en este artículo, no es posible mostrar la sistematización completa de los modelos del robot motivo de estudio. Sin embargo, en la referencia [10], se presenta en forma explícita, la aplicación de la metodología a un mecanismo de cinco barras usando una rotación variante [7]. Por tanto, en este artículo solo se presentan los modelos del robot en términos generales.

1 El marco teórico

Sobre el conjunto \mathfrak{R}^2 se definen dos operaciones binarias: $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ mediante los cuales, las parejas (\mathfrak{R}^2, \oplus) y $(\mathfrak{R}^2, \otimes)$ forman dos grupos, uno aditivo y otro conmutativo multiplicativo, respectivamente. Se demuestra que la terna $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes)$ es un cuerpo conmutativo [7]. Las operaciones $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ se definen de la manera siguiente:

- i) $\{a, b\} \oplus \{\alpha, \beta\} = \{a + \alpha, b + \beta\}$ (1.1)
- ii) $\{a, b\} \otimes \{\alpha, \beta\} = \{a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha\}$,

$$\forall \{a, b\}, \{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{R}^2$$

Por otro lado, en \mathfrak{R}^2 se define un producto escalar $\bullet : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, un producto interno, esto es, $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y una norma $|\bullet| : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ y, por tanto, la estructura $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes, \langle \bullet, \bullet \rangle, |\bullet|)$ es un espacio vectorial normado y con producto interno llamado el espacio vectorial de los números

complejos. La transformación lineal $\rho : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por:

$$\rho(p, q) = \frac{1}{\|p\|} \bullet p \otimes q; q \in \mathfrak{R}^2 \text{ fijo,} \quad (1.2)$$

es una rotación [7] Además, $p, q \in \mathfrak{R}^2$ son dos complejos de norma unitaria definidos por:

- 1) $p = \{p_0, p_1\}$, $p_0^2 + p_1^2 = 1$ (1.3)
- 2) $q = \{q_0, q_1\}$, $q_0^2 + q_1^2 = 1$

Finalmente, las relaciones entre los componentes de los complejos $p, q \in \mathfrak{R}^2$ y los componentes de las rotaciones son las siguientes:

- 1) $p = \{p_0, p_1\}$; $p_0 \in \mathfrak{R}$; $p_0 = \text{Cos } \theta_1$ (1.4)
 $p_1 \in \mathfrak{R}$; $p_1 = \pm \text{Sen } \theta_1$
- 2) $q = \{q_0, q_1\}$; $q_0 \in \mathfrak{R}$; $q_0 = \text{Cos } \theta_2$
 $q_1 \in \mathfrak{R}$; $q_1 = \pm \text{Sen } \theta_2$

Aquí, $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{R}$ son los desplazamientos angulares.

2 Arquitectura del robot paralelo

La figura siguiente muestra la configuración del robot analizado en este artículo:

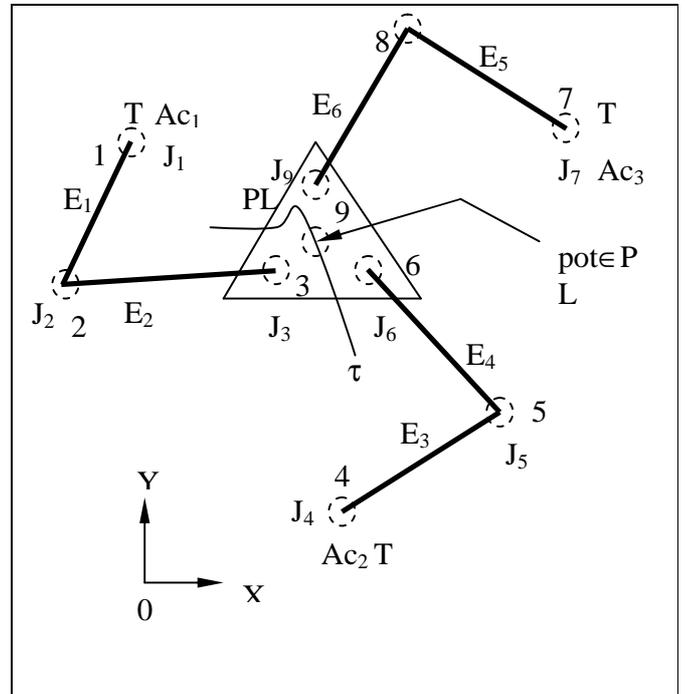


Fig 2.1 Arquitectura del robot paralelo.

El robot motivo de estudio en este artículo consta de 8 eslabones rígidos incluyendo la tierra (T) del sistema [9]. Dichos eslabones están conectados por juntas rotacionales del tipo revolución como se muestra en la figura 2.1. El punto $\text{pot} \in \text{PL}$ definido sobre el centroide del eslabón PL estará obligado, en este caso, a seguir una trayectoria (τ) definida en el plano (X,Y). Finalmente, en las juntas rotacionales J_1 , J_4 y J_7 se localizan los actuadores Ac_1 , Ac_2 y Ac_3 los cuales generan el movimiento del multicuerpo en estudio.

3 Análisis en la configuración no deformada

El objetivo en esta sección es determinar las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento que permitan encontrar las coordenadas del punto $\text{pot} \in \text{PL}$ y la orientación con respecto al eje X de la plataforma PL. Para ello, se definen vectores de posición sobre el robot en estudio como se muestra en la figura 3.1.

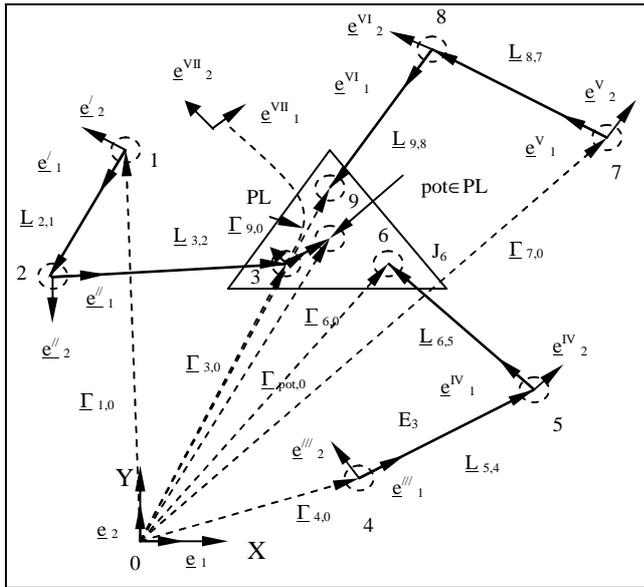


Fig 3.1 Vectores de posición y sistemas locales.

Para relacionar los desplazamientos angulares de los eslabones que componen al robot en estudio, es necesario asociar bases locales sobre los eslabones como se muestra en la figura 3.1. Dichas relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{L}_{2,1} &= l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I, & \underline{L}_{3,2} &= l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} \\ 2) \quad \underline{L}_{5,4} &= l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III}, & \underline{L}_{6,5} &= l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^{IV} \\ 3) \quad \underline{L}_{8,7} &= l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V, & \underline{L}_{9,8} &= l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^{VI} \end{aligned} \quad (3.1)$$

siendo $l_{i,i+1} \in \mathfrak{R}$ las longitudes principales de los eslabones. En este artículo se usarán las relaciones geométricas siguientes [9]:

Dados $\underline{\Gamma}_{\text{pot},0} \in \mathfrak{R}^2$ y $\alpha_{\text{pot}} \in \mathfrak{R}$ se encuentran, $\underline{\Gamma}_{3,0}$, $\underline{\Gamma}_{6,0}$, $\underline{\Gamma}_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$ con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0} &= (r_{3,0,x}, r_{3,0,y}) = (x_{\text{pot},0} - l_{\text{pot},3} \cos \theta_{\text{pot}}, \\ & \quad y_{\text{pot},0} - l_{\text{pot},3} \sin \theta_{\text{pot}}) \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{6,0} &= (\Gamma_{3,0,x} + l_{3,6} \cos (\theta_{\text{pot}} - \beta_{\text{pot}}), \\ & \quad \Gamma_{3,0,y} + l_{3,6} \sin (\theta_{\text{pot}} - \beta_{\text{pot}})) \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{9,0} &= (\Gamma_{3,0,x} + l_{3,9} \cos (\theta_{\text{pot}} + \beta_{\text{pot}}), \\ & \quad \Gamma_{3,0,y} + l_{3,9} \sin (\theta_{\text{pot}} + \beta_{\text{pot}})) \end{aligned}$$

Aquí, $\theta_{\text{pot}} \in \mathfrak{R}$ y $\beta_{\text{pot}} \in \mathfrak{R}$ son dos desplazamientos angulares, el primero define la orientación de la plataforma PL con respecto al eje X y, el segundo, es un ángulo constante medido entre dos aristas del triángulo asociado con la plataforma, en tanto, $l_{\text{pot},3}$, $l_{3,6}$, $l_{3,9} \in \mathfrak{R}^+$ son longitudes medidas en la plataforma. Dichas relaciones se satisfacen a la inversa. Las rotaciones de la base canónica sobre cada una de los sistemas locales se pueden expresar por medio de la ecuación (1.2). Por tanto, las coordenadas de los puntos de las aristas de la plataforma se encuentran por medio de las expresiones siguientes [10]:

(3.2)

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0} &= \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ q \otimes \underline{e}_1 \} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{6,0} &= \underline{\Gamma}_{4,0} \oplus l_{5,4} \cdot \{ r \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{6,5} \cdot \{ s \otimes \underline{e}_1 \} \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{9,0} &= \underline{\Gamma}_{7,0} \oplus l_{8,7} \cdot \{ t \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{9,8} \cdot \{ u \otimes \underline{e}_1 \} \end{aligned}$$

Aquí, $p, q, r, s, t, u \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos de norma unitaria.

3.1 Formulación del problema inverso

En esta sección se formula el problema cinemático inverso relacionado con la configuración no deformada asociada con el robot en estudio, esto es:

“Dados $\underline{\Gamma}_{3,0}$, $\underline{\Gamma}_{6,0}$, $\underline{\Gamma}_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{\Gamma}_{1,0}$, $\underline{\Gamma}_{4,0}$, $\underline{\Gamma}_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{5,4}$, $l_{6,5}$, $l_{8,7}$, $l_{9,8}$, $l_{3,6}$, $l_{3,9} \in \mathfrak{R}^+$, $\theta_{\text{pot}} \in \mathfrak{R}$ encuentre: $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$ tal que las expresiones (3.2) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} 1) \quad p_0^2 + p_1^2 &= 0; & q_0^2 + q_1^2 &= 0; & r_0^2 + r_1^2 &= 0 \\ 2) \quad s_0^2 + s_1^2 &= 0; & t_0^2 + t_1^2 &= 0; & u_0^2 + u_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

4 Análisis cinemático en la configuración no deformada: formulación del problema directo

En esta sección se presenta el modelo del robot paralelo utilizado para formular el problema directo en la configuración deformada. Cabe mencionar que con las ecuaciones del problema inverso no es posible formular el directo. Considere la figura siguiente:

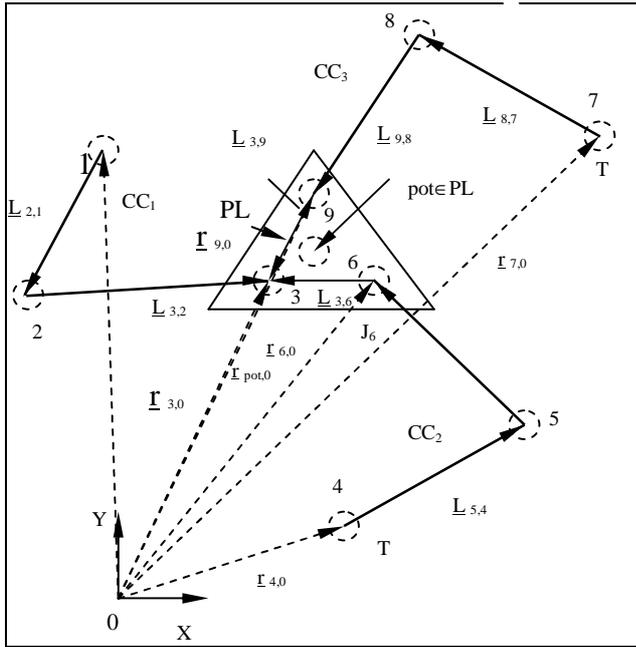


Fig 4.1 Vectores para formular el problema directo.

Con los vectores definidos en la figura anterior se construyen las siguientes ecuaciones de lazo:

- 1) $\underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1} \oplus \underline{L}_{3,2} - [\underline{\Gamma}_{4,0} \oplus \underline{L}_{5,4} \oplus \underline{L}_{6,5} \oplus \underline{L}_{3,6}] = \underline{0}$ (4.1)
- 2) $\underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1} \oplus \underline{L}_{3,2} - [\underline{\Gamma}_{7,0} \oplus \underline{L}_{8,7} \oplus \underline{L}_{9,8} \oplus \underline{L}_{3,9}] = \underline{0}$
- 3) $\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{L}_{2,1} \oplus \underline{L}_{3,6} \oplus \underline{\Gamma}_{pot,3}$

Además, $\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{3,0} \oplus \underline{\Gamma}_{pot,3}$

Dichas ecuaciones se escriben en términos de complejos y de las rotaciones de la base canónica de la manera siguiente:

- 1) $\underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ q \otimes \underline{e}_1 \} - [\underline{\Gamma}_{4,0} \oplus l_{5,4} \cdot \{ r \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{6,5} \cdot \{ s \otimes \underline{e}_1 \} \oplus$ (4.2)

$$\oplus l_{3,6} \cdot \{ w \otimes v \otimes \underline{e}_1 \}] = \underline{0}$$

- 2) $\underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ q \otimes \underline{e}_1 \} - [\underline{\Gamma}_{7,0} \oplus l_{8,7} \cdot \{ t \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{9,8} \cdot \{ u \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,9} \cdot \{ x \otimes v \otimes \underline{e}_1 \}] = \underline{0}$

- 3) $\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ q \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{pot,3} \cdot \{ v \otimes \underline{e}_1 \}$

Aquí, $v, x, w \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos relacionados con la plataforma

4.1 Formulación del problema directo en la configuración no deformada

“ Dados, $p = \{p_0, p_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$ con $\|p\| = \|r\| = \|t\| = 1$, $w = \{w_0, w_1\}$, $x = \{x_0, x_1\}$ con $\|w\| = \|x\| = 1$, $\underline{\Gamma}_{1,0}, \underline{\Gamma}_{4,0}, \underline{\Gamma}_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}, l_{pot} \in \mathfrak{R}^+$, encuentre: $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$, $v = \{v_0, v_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $v = \{v_0, v_1\}$, tal que: las expresiones (4.2) sean satisfechas y,

- 1) $v_0^2 + v_1^2 = 0$; $q_0^2 + q_1^2 = 0$
- 2) $s_0^2 + s_1^2 = 0$; $u_0^2 + u_1^2 = 0$ ”

5 Análisis en la configuración deformada

En esta sección se presenta en modelo del robot motivo de estudio en la configuración deformada. Dicha configuración se muestra en la figura 5.1

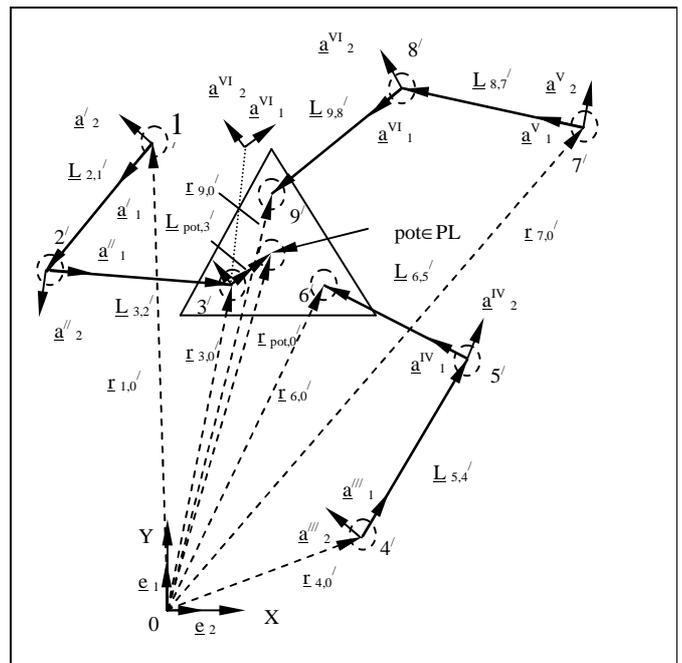


Fig 5.1 Vectores de posición y sistemas locales.

Los vectores definidos en la configuración anterior se escriben en términos de los sistemas locales de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{L}_{2,1}' &= l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I ; & \underline{L}_{3,2}' &= l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} \\ 2) \quad \underline{L}_{5,4}' &= l_{5,4} \cdot \underline{a}_1^{III} ; & \underline{L}_{6,5}' &= l_{6,5} \cdot \underline{a}_1^{IV} \\ 3) \quad \underline{L}_{8,7}' &= l_{8,7} \cdot \underline{a}_1^V ; & \underline{L}_{9,8}' &= l_{9,8} \cdot \underline{a}_1^{VI} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Por otro lado, las rotaciones de las bases locales definidas en la configuración no deformada son rotaciones de la base inercial, en tanto que las bases mostradas en la figura 5.1 son rotaciones de las bases no deformadas [10]. Por tanto, las nuevas coordenadas de las aristas de la plataforma se escriben en términos de las expresiones (5.1), de números complejos y de la ecuación (1.2) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0}' &= \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ P \otimes p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ & \quad \oplus l_{3,2} \cdot \{ Q \otimes q \otimes \underline{e}_1 \} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{6,0}' &= \underline{\Gamma}_{4,0} \oplus l_{5,4} \cdot \{ R \otimes r \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ & \quad \oplus l_{6,5} \cdot \{ S \otimes s \otimes \underline{e}_1 \} \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{9,0}' &= \underline{\Gamma}_{7,0} \oplus l_{8,7} \cdot \{ T \otimes t \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ & \quad \oplus l_{9,8} \cdot \{ U \otimes u \otimes \underline{e}_1 \} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aquí, $P, Q, R, S, T, U \in \mathfrak{R}^2$ son complejos de norma unitaria relacionados con la configuración deformada.

5.1 Formulación del problema inverso en la configuración deformada

“ Dados $\underline{\Gamma}_{3,0}' \in \mathfrak{R}^2, \underline{\Gamma}_{6,0}' \in \mathfrak{R}^2, \underline{\Gamma}_{9,0}' \in \mathfrak{R}^2, \underline{\Gamma}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2, \underline{\Gamma}_{4,0} \in \mathfrak{R}^2, \underline{\Gamma}_{7,0} \in \mathfrak{R}^2, l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^+, p = \{p_0, p_1\}, q = \{q_0, q_1\}, r = \{r_0, r_1\}, s = \{s_0, s_1\}, t = \{t_0, t_1\}, u = \{u_0, u_1\}$; con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = 1$, encuentre: $P = \{P_0, P_1\}, Q = \{Q_0, Q_1\}, R = \{R_0, R_1\}, S = \{S_0, S_1\}, T = \{T_0, T_1\}, U = \{U_0, U_1\}$ tal que las expresiones (5.2) sean satisfechas y,

$$\begin{aligned} 1) \quad P_0^2 + P_1^2 &= 1 ; & Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \\ 2) \quad R_0^2 + R_1^2 &= 1 ; & S_0^2 + S_1^2 &= 1 \\ 3) \quad T_0^2 + T_1^2 &= 1 ; & U_0^2 + U_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

6 Análisis cinemático en la configuración deformada: formulación del problema directo

En esta sección se presenta el modelo del robot paralelo con el cual se formula el problema directo en

la configuración deformada mostrada en la figura 6.1

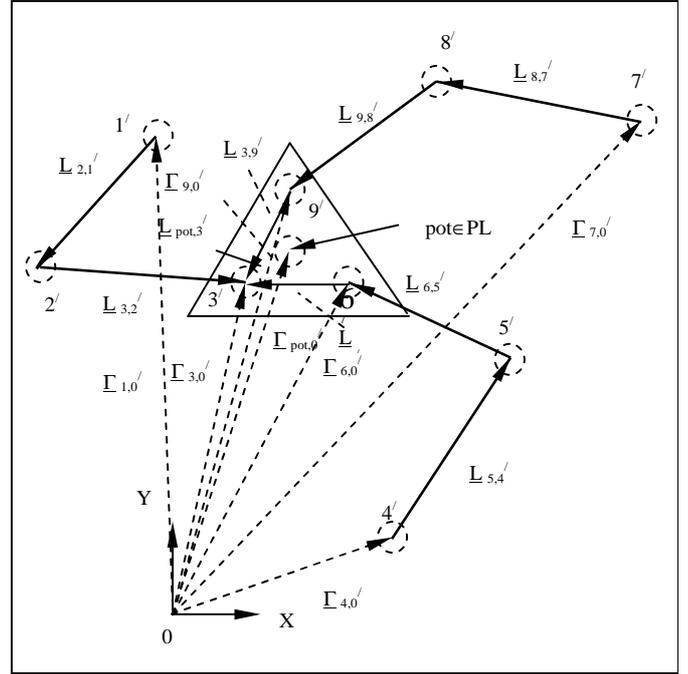


Fig 5.1 Vectores de posición y sistemas locales.

Las ecuaciones de lazo relativas con el punto 3' son las siguientes :

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1}' \oplus \underline{L}_{3,2}' - [\underline{\Gamma}_{4,0} \oplus \underline{L}_{5,4}' \oplus \underline{\Gamma}_{6,0}' \oplus \underline{L}_{6,5}' \oplus \underline{L}_{3,6}'] &= \underline{0} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' - [\underline{\Gamma}_{7,0} \oplus \underline{L}_{8,7}' \oplus \underline{\Gamma}_{9,0}' \oplus \underline{L}_{9,8}' \oplus \underline{L}_{3,9}'] &= \underline{0} \end{aligned}$$

y

$$\underline{\Gamma}_{pot,0}' = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1}' \oplus \underline{L}_{3,2}' \oplus \underline{L}_{pot,3}'$$

En términos de complejos las expresiones anteriores se escriben de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ P \otimes p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ Q \otimes q \otimes \underline{e}_1 \} - \\ [\underline{\Gamma}_{4,0} \oplus l_{5,4} \cdot \{ R \otimes r \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{6,5} \cdot \{ S \otimes s \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ \oplus l_{3,6} \cdot \{ W \otimes v \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII} \}] = \underline{0} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ P \otimes p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ Q \otimes q \otimes \underline{e}_1 \} - \\ - [\underline{\Gamma}_{7,0} \oplus l_{8,7} \cdot \{ T \otimes t \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{9,8} \cdot \{ U \otimes u \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ l_{3,9} \cdot \{ X \otimes v \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII} \}] = \underline{0} \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{pot,0}' = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \cdot \{ P \otimes p \otimes \underline{e}_1 \} \oplus l_{3,2} \cdot \{ Q \otimes q \otimes \underline{e}_1 \} \oplus \\ \oplus l_{pot,3} \cdot \{ V \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII} \} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aquí, $V, X, W \in \mathfrak{R}^2$ son complejos relacionados con la plataforma.

6.1 Formulación del problema directo en la configuración deformada

“ Dados $P = \{P_0, P_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$, $T = \{T_0, T_1\}$ con $\|P\| = \|R\| = \|T\| = 1$, $\Gamma_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\Gamma_{4,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\Gamma_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$, $v = \{v_0, v_1\}$, $w = \{w_0, w_1\}$, $x = \{x_0, x_1\}$; con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|w\| = \|x\| = 1$, encuentre: $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ $V = \{V_0, V_1\}$ $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $S = \{S_0, S_1\}$, $U = \{U_0, U_1\}$ tal que las expresiones (6.2) sean satisfechas y,

$$\begin{aligned} 1) V_0^2 + V_1^2 &= 1; & Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \\ 2) S_0^2 + S_1^2 &= 1; & U_0^2 + U_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

7 Programación y simulación

Las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento asociadas con el robot motivo de estudio fueron programadas en el Software VISUAL BASIC V6. La figura 7.1. muestra la salida gráfica de la configuración deformada.

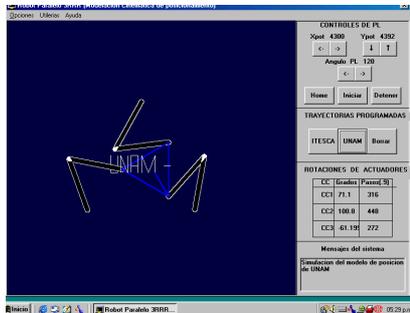


Fig 7.1 Salida gráfica de la configuración deformada

Conclusiones

En este artículo se ha modelado la cinemática de posicionamiento de un robot paralelo tipo RRR usando la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos [7]. Los resultados derivados de este trabajo se resumen en los puntos siguientes:

- El problema de la cinemática inversa tanto en la configuración no deformada como en la deformada generó un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

- El problema de la cinemática directa tanto en la configuración no deformada como en la deformada generó un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas.
- El uso de operaciones binarias para el modelado de las ecuaciones de posicionamiento permite es una nueva herramienta para la modelación cinemática de robots paralelos.

Referencias

- [1] Miomir Vukobratovic. “Introduction to Robotic”. Springer-Verlany, Berlin. (1989).
- [2] Charles C. Nguyen, Mo Jamshidi. *Guest Editorial: Parallel Closed Kinematic Chain Manipulator or Devices*. *Journal of Robotic System*. 10(s), pp 557-560. (1993).
- [3] Winsama Khalil, Sebastien Besnard. “Self Calibration of Stewart-Gough Parallel Robots Without Extra Sensors”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* Vol. 15, No. 6 (1997)
- [4] Min Ki Lee, Kun Woo Park. “Kinematic and Manipulator for Enlarging Workspace and Avoiding Singularities”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* Vol. 15, No. 6 (1999).
- [5] Luc Baron, J. Angeles. “The Direct Kinematics of Parallel Manipulators Under Joint-Sensor Redundancy”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* Vol. 16, No. 1, (2000).
- [6] Merlet Jean-Pierre. “Les Robots Parallèles”. Hermès Publishers, Paris (1990).
- [7] Reyes, Luis. “Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano”. *Estudios Ocasionales*. Universidad Anahuac del Sur. ISBN 968-64-02-08-X. (1998) .
- [8] Cuenca F. Jiménez E., Reyes L. “Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo tipo RRR. Coloquio 1999, Facultad de Ingeniería, UNAM (1999).
- [9] Jiménez E. “Simulación de un proceso de manufactura con obstáculos en la línea de producción”. Tesis de grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, DEPI, UNAM. (1998).
- [10] Jiménez E., Reyes L., Cuenca F. “Modelación de un mecanismo de cinco barras usando una rotación variante de los números complejos”. 2º Congreso Nacional de Mecatrónica. Universidad Anáhuac del Sur. (2003).