

Una Contribución al Diseño de Sistemas de Control Robusto Aplicando el Álgebra Hipercompleja

Irma Salinas Pérez, Luis Reyes Ávila ¹, Mario Márquez Miranda,

Universidad Tecnología de la Mixteca,
Km. 2.5 Carretera Acatlima, Huajuapán de León, Oaxaca, C. P. 69000, México
isalinas@mixteco.utm.mx
mmarquez@mixteco.utm.mx

¹Instituto Mexicano del Transporte,
Km. 12+00, Carr. Qro- Galindo, Sanfandila, Mpio. de Escobedo, Qro. Apartado Postal 1098, C. P. 76700
Querétaro, Qro.

Resumen

En este trabajo se presenta una nueva aplicación del álgebra hipercompleja (cuaterniones), en esquemas de control robusto para mover un robot de un grado de libertad (péndulo) de una posición a otra. La ley de control, se modela en el espacio vectorial de cuaterniones; el controlador está diseñado de tal manera que el vector de posición es asintóticamente estable para todo movimiento del robot. Una de las ventajas más sobresalientes obtenidas al trabajar en el espacio vectorial de cuaterniones, se produce en la respuesta libre del sistema; en este caso, la ecuación dinámica no lineal de robot no necesita linealizarse como sucede en [1], [2], [3] y [4]. La simulación de resultados demuestra que el controlador propuesto tiene un buen desempeño ante la presencia de cambios de parámetros del robot y las no linealidades del sistema.

Palabras clave: álgebra hipercompleja, cuaterniones, estabilizador, control robusto e incertidumbre.

1. Introducción.

En los trabajos realizados por [5], [6], [7] y [8], se demuestra la superioridad del álgebra de cuaterniones en la modelación cinemática y dinámica de cuerpos rígidos de cadena abierta y cadena cerrada, con relación a los métodos tradicionales; esta superioridad se acentuará aún más si es posible aplicarla en la teoría de control moderno de cuerpos

rígidos (robots), con el propósito de diseñar leyes de control más eficaces, capaces de compensar cualquier perturbación o variación de parámetros del robot; sin tener la necesidad de reducir el modelo dinámico a una determinada región de trabajo; como ocurre en los sistemas de control tradicionales [1], [2], [3] y [4]

Por lo tanto, en este trabajo se propone una nueva estrategia de control robusto, aplicando el álgebra hipercompleja en la modelación de la ley de control para un robot de un grado de libertad cuyo modelo cinemático y dinámico se desarrolla en [7]. Además, se realiza una comparación entre el desempeño del lazo cerrado del sistema modelado con cuaterniones y el control robusto tradicional [1] y [9].

El control robusto, establece que cualquier sistema físico tiene un grado de *incertidumbre*, originado por los valores de parámetros desconocidos. En el caso de un sistema tan complicado como un robot, esto es particularmente cierto, especialmente si el robot conduce cargas desconocidas. El control robusto, se basa en el conocimiento anticipado de los límites de la incertidumbre producida por la inercia y la carga del robot, utilizando estos límites, una ley de control retroalimentada se sintetiza garantizando la estabilidad del robot, a partir de cualquier condición inicial y de los estados del sistema.

2. Ley de control diseñada con cuaterniones.

El control robusto de sistemas tiene por objetivo determinar una ley de control $u \in \mathcal{N}^d$, capaz de cancelar los efectos de las perturbaciones desconocidas; es decir, dada una trayectoria deseada $q^d(t) \in \mathcal{N}^d$ con primeras derivadas continuas, el error de seguimiento $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$; para tal propósito u debe incluir los siguientes elementos:

- un estabilizador asintótico $v \in \mathcal{N}^d$
- y un compensador robusto $\Delta v \in \mathcal{N}^d$

El compensador Δv , se obtiene a través de una función implícita de Lyapunov, por medio de la cual un estado retroalimentado se sintetiza, utilizando los límites de la incertidumbre η del sistema.

En la figura 1, se muestra la configuración del robot de un grado de libertad, que se desea controlar y la ecuación (1) define el comportamiento dinámico no lineal del mismo [7].

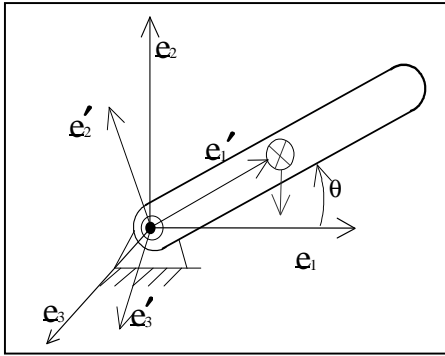


Figura 1 Configuración de un robot de un grado de libertad.

$$2I(\ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3) + 1/2 mgl(p_0^2 - p_3^2) = u \quad (1)$$

donde I , representa el momento inercial alrededor del centro de masa, m la masa total, l la distancia del eje de la junta al centro de masa, $u \in \mathcal{N}^d$ el vector de control, $(p_0^2 - p_3^2)$ y $2(\ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3)$ la posición y aceleración angular respectivamente. La ley de control se define como:

$$u = \hat{I} v + \frac{1}{2} \hat{mgl}(p_0^2 - p_3^2) \quad (2)$$

donde \hat{I} y \hat{mgl} son versiones aproximadas de I y mgl , al sustituir la ecuación (2) en (1) se obtiene

$$2(\ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3) = \frac{1}{I} \hat{I} v + \frac{1}{4I} \hat{mgl}(p_0^2 - p_3^2) - \frac{1}{4I} mgl(p_0^2 - p_3^2)$$

$$= v + \left(\frac{\hat{I}}{I} - 1\right) v + \frac{\Delta mgl}{4I}(p_0^2 - p_3^2)$$

$$(\ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3) = v + \eta(v, p, \dot{p}) \quad (3)$$

donde $\Delta mgl = mgl - \hat{mgl}$ y η se determinan por:

$$\eta = \left(\frac{\hat{I}}{I} - 1\right) v + \frac{\Delta mgl}{4I}(p_0^2 - p_3^2) \quad (4)$$

3. Modelación de los vectores de error con cuaterniones.

Sean p y $q \in \mathcal{N}^d$ dos cuaterniones que definen la orientación real y deseada del robot con respecto al sistema de referencia local e_j^1 , obtenidos a través de la rotación de la base global alrededor del eje $e_1 = \{0, 1, 0, 0\}$. Entonces el error de posición del robot, utilizando el álgebra de cuaterniones, se define como: la diferencia entre la rotación de la posición real y la rotación de la posición deseada de la junta del robot.

$$e_1 = e_r - e_d = T_v[\rho(p, e_j)] - T_v[\rho(q, e_j)]$$

$$= \{(p_0^2 - p_3^2), 2p_0 p_3, 0\} - \{(q_0^2 - q_3^2), 2q_0 q_3, 0\} \quad (5)$$

la primera derivada del vector de error es:

$$e_2 = \dot{\underline{e}}_r - \dot{\underline{e}}_d = T_v[2 \dot{p}^* \bar{p}] - T_v[2 \dot{q}^* \bar{q}]$$

$$= T_v[2\{\dot{p}_0 p_0 + \dot{p}_3 p_3, 0, 0, \dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3\}]$$

$$- T_v[2\{\dot{q}_0 q_0 + \dot{q}_3 q_3, 0, 0, \dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3\}]$$

$$= 2[\{0, 0, \dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3\} - \{0, 0, \dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3\}] \quad (6)$$

donde

$$\dot{q} = \{\dot{q}_0, 0, 0, \dot{q}_3\}, \quad \bar{q} = \{q_0, 0, 0, -q_3\},$$

$$\dot{p} = \{\dot{p}_0, 0, 0, \dot{p}_3\}, \quad \bar{p} = \{p_0, 0, 0, -p_3\}.$$

Para todo vector de error $e = \{e_1, e_2\}^T \subset \mathcal{N}^d$, la aceleración angular real y deseada del sistema robot se obtienen como:

$$\dot{\omega}_r = T_v[\dot{p}^* \bar{p}]$$

$$= T_v[2\{\ddot{p}_0 p_0 + \ddot{p}_3 p_3, 0, 0, \ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3\}]$$

$$= 2[\{0, 0, \ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3\}] \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_d = T_v[\dot{q}^* \bar{q}]$$

$$= T_v[2\{\ddot{q}_0 q_0 + \ddot{q}_3 q_3, 0, 0, \ddot{q}_3 q_0 - \ddot{q}_0 q_3\}]$$

$$= 2[(0, 0, \ddot{q}_3 q_0 - \ddot{q}_0 q_3)] \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \{\ddot{q}_0, 0, 0, \ddot{q}_3\}, & \bar{\mathbf{q}} &= \{q_0, 0, 0, -q_3\}, \\ \ddot{\mathbf{p}} &= \{\ddot{p}_0, 0, 0, \ddot{p}_3\}, & \bar{\mathbf{p}} &= \{p_0, 0, 0, -p_3\}. \end{aligned}$$

aplicando la transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathcal{H}^3 \times \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathcal{H}^4$ a \mathbf{e} , $\underline{\alpha}_r$ y $\underline{\alpha}_d$ con la base canónica $B = \{[1, 0, 0], [0, 0, 1]\}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{i} \rangle - \langle \mathbf{e}_d, \mathbf{i} \rangle \\ &= \langle \{(p_0^2 - p_3^2), 2p_0 p_3, 0\}, [1, 0, 0] \rangle \\ &\quad - \langle \{(q_0^2 - q_3^2), 2q_0 q_3, 0\}, [1, 0, 0] \rangle \\ &= (p_0^2 - p_3^2) - (q_0^2 - q_3^2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \langle \underline{\omega}_r, \mathbf{k} \rangle - \langle \underline{\omega}_d, \mathbf{k} \rangle \\ &= \langle 2\{0, 0, \dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3\}, [0, 0, 1] \rangle - \\ &\quad \langle 2\{0, 0, \dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3\}, [0, 0, 1] \rangle = \\ &= 2[(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3) - (\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_r &= \langle \dot{\omega}_r, \mathbf{k} \rangle \\ &= \langle 2\{0, 0, \ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3\}, [0, 0, 1] \rangle \\ &= 2[(\ddot{p}_3 p_0 - \ddot{p}_0 p_3)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_d &= \langle \dot{\omega}_d, \mathbf{k} \rangle \\ &= \langle 2\{0, 0, \ddot{q}_3 q_0 - \ddot{q}_0 q_3\}, [0, 0, 1] \rangle \\ &= 2[(\ddot{q}_3 q_0 - \ddot{q}_0 q_3)] \end{aligned} \quad (12)$$

las variables de estado para el error de seguimiento se definen como:

$$\mathbf{E}_1 = (p_0^2 - p_3^2) - (q_0^2 - q_3^2) \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_2 = 2[(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3) - (\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3)] \quad (14)$$

Las derivadas del vector de error son:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{E}_2 = 2[(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3) - (\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3)] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \underline{\alpha}_r - \underline{\alpha}_d \\ &= v + \eta - \underline{\alpha}_d = v + \eta - 2[(\ddot{q}_3 q_0 - \ddot{q}_0 q_3)] \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación dinámica del sistema no lineal en su representación en el espacio estado, que define al error de posición y velocidad como un subespacio de cuaterniones se expresa como:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A} \mathbf{E} + \mathbf{B} \{v + \eta - \underline{\alpha}_d\} \quad (17)$$

donde \mathbf{E}_1 y $\mathbf{E}_2 \subset \mathcal{H}^4$, representan los vectores de posición, $\mathbf{A} \in \mathcal{H}^{2 \times 2}$ la matriz de estado y $\mathbf{B} \in \mathcal{H}^{4 \times 2}$ el vector de entrada. Si los valores característicos de \mathbf{A} son reales y de signo contrario el sistema es inestable, y es necesario introducir una ley de control v capaz de estabilizar al sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v &= -\mathbf{K} \mathbf{E} + \Delta v + \underline{\alpha}_d = -k_1 \mathbf{E}_1 - k_2 \mathbf{E}_2 + \Delta v + \underline{\alpha}_d \\ &= -k_1[(p_0^2 - p_3^2) - (q_0^2 - q_3^2)] - 2k_2[(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3) \\ &\quad - (\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3)] + \Delta v + \underline{\alpha}_d \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\mathbf{K} = \{k_1, k_2\} \in \mathcal{H}^{1 \times 2}$, representa la matriz de retroalimentación de estado, con elementos positivos k_1 y k_2 que determinan la ganancia de posición y velocidad angular del sistema respectivamente. Si se sustituye esta ecuación en (17) se produce:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A} \mathbf{E} + \mathbf{B} \{-\mathbf{K} \mathbf{E} + \Delta v + \eta\} \quad (19)$$

lo cual resulta en:

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{E} + \mathbf{B} \{\Delta v + \eta\} \quad (20)$$

El término $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$, representa la matriz de Hurwitz, haciendo $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$ y sustituyendo esta matriz en (6.20) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_1 \\ \dot{\mathbf{E}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} * \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} (p_0^2 - p_3^2) - (q_0^2 - q_3^2) \\ (\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3) - (\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{\Delta v + \eta\}$$

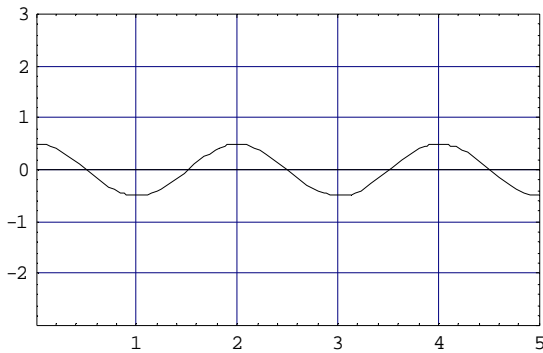
la cual se expresa en forma matricial.

$$\dot{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{E} + \mathbf{B} \{\Delta v + \eta\} \quad (22)$$

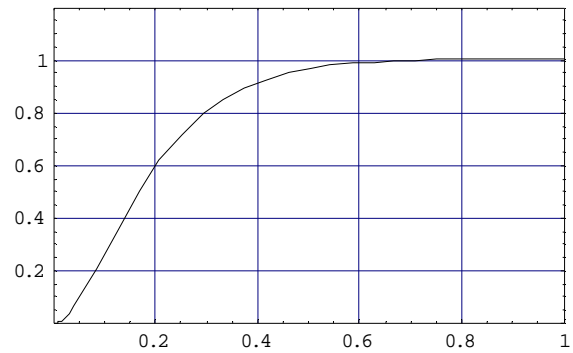
A continuación se diseña el compensador robusto $\Delta v \in \mathcal{H}^4$, encargado de cancelar los efectos de la incertidumbre η del sistema. Para tal efecto, se define de manera implícita una función $\beta(E, t)$ que satisface las siguientes desigualdades:

$$\|\Delta v\| < \beta(E, t) \quad (23)$$

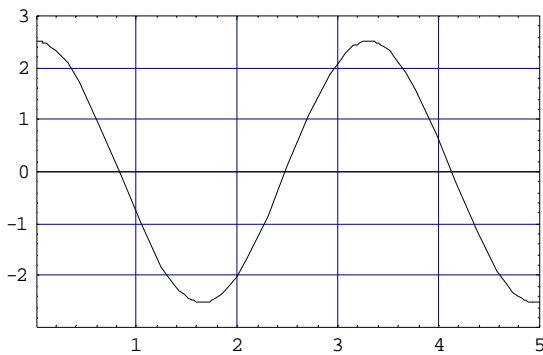
$$\|\eta\| < \beta(E, t) \quad (24)$$



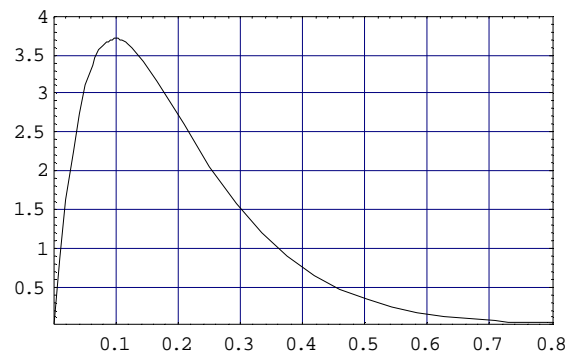
Gráfica 1. Respuesta libre de un robot de un grado de libertad con $(p_0^2 - p_3^2)[0] = 0.5 \text{ rad.}$ y $E_2[0] = 0$



Gráfica 3. Respuesta forzada del sistema robot de un grado de libertad ante una entrada escalón con $E_1[0]=0$ y $E_2[0]=0$.



Gráfica 2. Respuesta libre de un robot de un grado de libertad con $(p_0^2 - p_3^2)[0] = 0.8 \pi \text{ rad.}$ y $E_2[0]=0$



Gráfica 4 Error de velocidad del robot de un grado de libertad ante una entrada escalón unitario y un controlador robusto.

4.2 Respuesta Forzada.

El análisis de estabilidad del robot de un grado de libertad mostrado en la figura 1, con condiciones iniciales cero, ante una entrada escalón unitario, se presenta en las gráficas 3 y 4; en donde se observa que el sistema es asintóticamente estable. Para este estudio se considerarán los datos propuestos en [9].

- El controlador \mathbf{v} debe ser críticamente amortiguado ($\zeta = 1$).
- El tiempo de establecimiento del sistema es 0.4 seg. o menos.
- El controlador es de la forma

$$\mathbf{v} = -20 E_2 - 100 E_1 + \Delta \mathbf{v}$$
- Los límites de la incertidumbre η son: $5 \leq I \leq 10$, $5 \leq m g l \leq 10$ mientras que $\hat{l} = 5$ y $\hat{mgl} = 5$.

5. Conclusiones.

El potencial del álgebra hipercompleja, se ha demostrado por medio de la modelación de la ley de control de un robot de un grado de libertad. Un controlador robusto $\Delta \mathbf{v}$, se ha establecido aplicando cuaterniones en la modelación de los vectores de error de posición y velocidad.

Las gráficas 3 y 4 revelan que el sistema de control robusto propuesto es eficiente y el robot es capaz de seguir cualquier trayectoria de manera asintótica, es decir, $\mathbf{q}_r \rightarrow \mathbf{q}_d$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para el análisis de estabilidad del sistema como un sistema no lineal se aplicó el segundo método de Lyapunov.

La aplicación del álgebra de cuaterniones en estrategias de control robusto es un método eficiente para resolver diversos problemas de control de posición y orientación de robots.

Sería interesante también, aplicar el álgebra de cuaterniones a otros esquemas de control como

por ejemplo: el control adaptativo, sliding y optimo y a otros robots con mayor número de grados de libertad, así como también; hacer un análisis comparativo semejante al desarrollado aquí con los sistemas de control propuestos en [3], [10] y [11].

Agradecimientos

Esta investigación se inicio en el Departamento de Postgrado de la Universidad Anáhuac del Sur, con el apoyo incondicional del P. Fernando Ibáñez a quien le expreso mi más profundo agradecimiento así como también a la Universidad Tecnológica de la Mixteca en donde se concluyo.

Referencias

- [1] William J. Palm III. “*Modeling, Analysis and Control of Dynamic Systems*” John Wiley & Sons 1999
- [2] Antti J. Koivo. “*Fundamentals for Control of Robotic Manipulator*”. John Wiley & Sons 1989.
- [3] S. V. Ulyanov, S. Watanabe: “*Soft computing for the robust control of robot unicycle with a new physical measure for mechanical controllability*”. Springer-Verlog Heridelberg. Volume 2, Number 2/ June 26, 1998, pages: 73 – 88.
- [4] Diane P. O’Leary and Yalin E. Sagduyu: “*Robot Control: swinging like a pendulum*”. Computing in Science & Engineering , copublished by the IEEE CS and the AIP juny / august 2003, pages 68 - 74.
- [5] Reyes Ávila Luis. “*Quaternions:Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies.Partie 1*”: Le Cadre Theorique.Rapport de Recherche Inria N0.1303-Rocquencourt, France, 1990.
- [6] Reyes Ávila Luis. “*Quaternions:Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies.Partie 2:Quelques Aplications*”. Rapport de Recherche Inria N0.1454- Rocquencourt,France,1990.
- [7] Márquez Mario. “*Modelado Matemático de la Cinemática de N Cuerpos Rígidos mediante Quaterniones*”: Reporte de Investigación N0. EGI- 003/ TDI/MM-02-08-98- México, 1998.
- [8] Méndez Canseco Mauricio Cirilo. “*Una variante en la representación del álgebra de Quaterniones*”. Reporte de Investigación No. EGI-001/ TDI/ MM- 01-0498- México, 1998.
- [9] Mark W. Spog, M. Vidyasagar . “*Robot Dynamics and Control*” . John Wiley & Sons 1989.
- [10] S. Stoyanov. “*Robus multiple- input-multiple- output control of non-linear continuous fermentación processes*”. Springer-Verlog . Volume 1, Number 1/ Agust, 2002, pages: 21 – 28.
- [11] J. Schilling R. “*Fundamentals for Control of robotic manipulator*”. John Wiley & Sons Inc, 1997.
- [12] Wolfram Stadler. “*Analytical Robotics and Mechatronic* “.McGraw-Hill, 1995.
- [13] Edward Bertrani. “*Mathematics for Dynamic Modeling*” . ACADEMIC PRESS, 1998.
- [14] M. Vidyasagar . “*Nonlinear Systems Analysis*” . Printice Hall 1993.
- [15] Stanley M. Shinner. “*Modern Control System Theory and Design*”. John Wiley & Sons 1992
- [16] Ken Dutton, Steve Thompson and Bill Barraclough. “*The Art of Control Engineering*”. Addison – Wiley 1997
- [17] Jean Jacque E. Slotine. “*Applied NonLineal Control*”. Printice Hall 1991.