

Calibración y Corrección de la Distorsión Radial en Sistemas de Visión para Robots

Juan Manuel IBARRA ZANNATHA, Eduardo de Jesús ITURBE CÓRDOVA

Laboratorio de Robótica
Departamento. de Control Automático del CINVESTAV
Av. IPN No. 2508, Lindavista, 07300 México, DF
jibarra@ctrl.cinvestav.mx y santo_aioria@hotmail.com

Resumen

En las aplicaciones de visión donde la cámara es un instrumento de medición se necesita un buen modelo del sistema de formación de imágenes y conocer con precisión sus parámetros; de ahí el interés de contar con algoritmos eficientes para la calibración de los sistemas de visión. Además, en la reconstrucción 3D, en el reconocimiento de objetos o en la generación de mapas para robots móviles es necesario extraer información sobre líneas rectas en imágenes por lo general distorsionadas. Esto justifica la necesidad de modelos y algoritmos para la estimación y corrección de distorsiones geométricas. Aquí se presenta la implementación de algoritmos simples y eficientes para resolver estos problemas básicos en la construcción de sistemas de visión y su aplicación en el análisis de imágenes para la reconstrucción dinámica de entornos 3D de robots móviles.

Palabras clave: Calibración de sistemas de visión, modelos de distorsión radial y su corrección.

1. Introducción

Cuando se desea que un sistema de visión realice de manera automática el reconocimiento de algún objeto o la construcción de modelos geométricos 3D del entorno, muy a menudo se necesita detectar las rectas presentes en la imagen. Estas aplicaciones se tornan complicadas por la presencia de diversos tipos de distorsiones causadas por el proceso de formación de imágenes. La proyección de puntos 3D sobre un plano 2D produce distorsiones lineales, mientras que las lentes usadas producen distorsiones no lineales.

La distorsión radial es una de las más estudiadas debido a que su efecto es muy notorio sobre una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, las imágenes que se utilizan en robótica móvil para la navegación asistida por visión y para la generación de mapas tienen una distorsión que impide la recuperación de líneas recta y es debida básicamente a la distorsión geométrica, al uso de focales cortas y a otros fenómenos que en conjunto se manifiestan como una distorsión radial que es necesario corregir.

La necesidad de corregir los efectos de estas distorsiones ha motivado el desarrollo de modelos matemáticos que las representan y de métodos que las corrigen. Pero, la diversidad de estructuras de los objetivos utilizados hace que la tarea de modelado de las distorsiones sea una tarea heurística compleja.

La principal aplicación de este trabajo será la reconstrucción 3D del entorno de un robot móvil usando información visual monocular, lo cual requiere de un sistema de adquisición de imágenes perfectamente calibrado (conocimiento de sus parámetros intrínsecos y extrínsecos) y cuyas distorsiones radiales estén bien corregidas. Por tanto, se necesita un mecanismo de calibración y un sistema de corrección de las distorsiones geométricas tipo cojín y barril, funcionando, ambos, de manera automática [6].

Después de la presentación del modelo de perspectiva considerado en el proceso de formación de imágenes, en la sección 2 se describe el proceso de calibración utilizado para identificar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de dicho sistema. En la sección 3 se presenta un modelo de distorsión radial junto con un procedimiento iterativo de identificación y su utilización en la corrección de dicha distorsión. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos con dos diferentes cámaras y varios tipos de patrones de calibración. Finalmente, en la sección 5 se comentan las conclusiones de este trabajo.

2. Calibración de Sistemas de Visión

El modelo de perspectiva es el más utilizado en el análisis de sistemas de formación imágenes. De acuerdo con dicho modelo, para un sistema óptico con una distancia focal f , un punto P del mundo real con coordenadas (X, Y, Z) produce un punto p en el plano imagen con coordenadas (x, y) definidas como:

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Aquí, los vectores de posición se representan en coordenadas proyectivas, u homogéneas, en donde el factor de escala para los puntos en el mundo real es unitario y \mathbf{I} para los puntos en el plano imagen. En este modelo, tanto P como p están representados en el referencial de la cámara.

2.1 Parámetros de una Cámara

En la ecuación (1) los puntos imagen están expresados en unidades métricas. Pero, como se necesita que estén expresados en píxeles, se requerirá de un factor de escala en cada dirección (k_x, k_y) y, como deben expresarse con respecto al punto principal de la imagen y no con respecto al referencial de la cámara, se requerirá de una translación de componentes (C_x, C_y). Lo cual, usando coordenadas proyectivas, se representa como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}x_p \\ \mathbf{I}y_p \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & C_x \\ 0 & k_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}x \\ \mathbf{I}y \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2)$$

k_x, k_y, C_x y C_y se conocen como parámetros intrínsecos del sistema de formación de imágenes. Ahora bien, a menudo es más útil tener la representación de los puntos 3D del espacio en el referencial del mundo asociado al espacio de trabajo del robot que en el referencial de la cámara.

Sea cP la representación en el referencial de la cámara de un punto 3D dentro del entorno del robot y sea ${}^M P$ su representación en el referencial del mundo. Si el vector ${}^cO_M \in \mathfrak{R}^3$ es el origen del referencial del mundo y ${}^cR_M \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de rotación que representa su orientación, ambos expresados en el referencial de la cámara, entonces se puede construir la siguiente relación cinemática:

$${}^cP = {}^cR_M {}^M P + {}^cO_M$$

en donde la matriz de rotación cR_M no es única, pues depende del tipo de parametrización elegido (ángulos de Euler, *Roll-pitch-yaw*, matriz de rotación generalizada, etc.). Usando la representación en coordenadas proyectivas, estas dos transformaciones se combinan en una matriz homogénea que resulta en la siguiente ecuación cinemática:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^cR_M & {}^cO_M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2 Modelo de Perspectiva

Las coordenadas del origen del referencial R_M , (t_x, t_y, t_z), y los tres vectores fila de la matriz de

rotación cR_M , (r_1, r_2, r_3), se denominan parámetros extrínsecos del sistema de formación de imágenes. Reuniendo las ecuaciones (1), (2) y (3) en una sola:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}x_p \\ \mathbf{I}y_p \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f k_x & 0 & C_x \\ 0 & f k_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & t_x \\ \bar{r}_2 & t_y \\ \bar{r}_3 & t_z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

y efectuando las multiplicaciones se obtiene el modelo de perspectiva completo, en forma de una matriz de transformación $T \in \mathfrak{R}^{4 \times 3}$, dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}x_p \\ \mathbf{I}y_p \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f k_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & f k_x t_x + C_x t_z \\ f k_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & f k_y t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.3 Calibración de Sistemas de Visión

Los parámetros intrínsecos y extrínsecos del sistema incluidos en la matriz de perspectiva T son de difícil medición, por lo que, generalmente, deben identificarse. Escribiendo la ecuación (4) en términos de los elementos t_{ij} de la matriz de perspectiva, con $t_{34}=1$ (factor de escala unitario) y despejando los valores de las coordenadas imagen se tiene que:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{t_{11}X + t_{12}Y + t_{13}Z + t_{14}}{t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}Z + 1} \\ y_p &= \frac{t_{21}X + t_{22}Y + t_{23}Z + t_{24}}{t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}Z + 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Agrupando los 11 términos desconocidos de la matriz de transformación de perspectiva T en un vector \mathbf{q} y formando una matriz \mathbf{j} acomodando apropiadamente las coordenadas (X, Y, Z) del punto 3D considerado y las coordenadas (x_p, y_p) del punto imagen p correspondiente, la ecuación (5) puede escribirse como una relación matricial lineal en los parámetros desconocidos, como sigue:

$$p = \mathbf{j} \mathbf{q} \quad (6)$$

Para un punto 3D dado, los elementos de la matriz \mathbf{j} son conocidos, por lo que (6) representa dos ecuaciones con 11 incógnitas. Entonces, basta con tomar una imagen con 6 puntos 3D conocidos para formar un sistema de 12 ecuaciones con 11 incógnitas, el cual puede resolverse por mínimos cuadrados, optimizando la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{q}}_{LS} = \min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{j} \mathbf{q} - p\|^2 \quad (7)$$

en donde la nueva matriz \mathbf{j} incluye los 6 puntos 3D utilizados y los 6 puntos imagen correspondientes,

que forman el nuevo vector p . La aplicación de mínimos cuadrados produce el siguiente resultado:

$$\hat{\mathbf{q}}_{LS} = (\mathbf{j}^T \mathbf{j})^{-1} \mathbf{j}^T p \quad (8)$$

A partir de los once parámetros t_{ij} contenidos en el vector \mathbf{q} así obtenido se pueden calcular los cuatro parámetros intrínsecos de la cámara involucrados en la ecuación (2), así como los siete parámetros extrínsecos del sistema de formación de imágenes: los tres componentes del vector de translación (t_x, t_y, t_z) y las tres rotaciones que generan la matriz ${}^C R_M$.

3. Distorsión Geométrica

Una lente ideal focaliza todo haz paralelo de entrada en un punto perfecto de dimensión infinitesimal, el punto focal. Sin embargo, debido a las aberraciones de la lente y a la difracción, el punto focal de una lente real tiene un tamaño finito, el cual es una medida de las aberraciones de la lente. A continuación se hace una breve descripción de las seis aberraciones presentes en las lentes.

3.1. Aberraciones

La aberración esférica depende de la forma de la lente, se manifiesta cuando los rayos de luz inciden con escasa inclinación respecto al eje óptico y consiste en la diferencia de refracción entre los rayos que pasan por los bordes y los centrales. En una lente convergente los rayos de los bordes convergen más que los axiales. La aberración cromática es debida a que el índice de refracción es función de la longitud de onda y hace que los rayos violetas y azules formen la imagen más cerca de la lente y que los rojos la formen más lejos.

En el plano focal, por efectos del astigmatismo, unas líneas aparecen perfectamente nítidas mientras que las que están en ángulo recto respecto a aquellas quedan fuera de foco. Esto significa que existe diferencia del punto de enfoque entre las imágenes radiales y transversales, formándose dos imágenes, una detrás de la otra. El astigmatismo se manifiesta en los rayos oblicuos debido a que la refracción de las secciones del haz de luz es asimétrica.

La aberración por curvatura de campo hace que las imágenes producidas por una lente de caras curvas es proyectada sobre una superficie también curva, cuyo radio es la distancia focal, en lugar de formarse sobre un plano. Esto significa que el plano de proyección tiene forma de una semiesfera. En la práctica, cuando el centro de la imagen está en foco, los bordes quedarán fuera de foco y viceversa.

Coma es una aberración oblicua que se produce cuando los rayos llegan con una cierta inclinación respecto al eje óptico, como sucede con el

astigmatismo. Se debe a que las diferentes zonas de la lente proporcionan imágenes con distinta escala, por lo que un punto adquiere la forma de un cometa, de donde deriva su nombre. Lo que produce el coma es una reducción del contraste de la imagen.

Finalmente, la distorsión geométrica es la incapacidad de una lente de reproducir un cuadrado como tal, es decir, la deformación que padecen líneas paralelas a los lados del cuadrado debido a que la escala de reproducción varía progresivamente del centro a los bordes. Si la escala aumenta desde el centro a los bordes, la distorsión es positiva (de cojín) y si disminuye es negativa (de barril). La distorsión no afecta la nitidez ni el contraste, como sucede con otras aberraciones, sino la fidelidad en la reproducción del objeto. No confundir con la distorsión por perspectiva que introducen los objetivos con focales muy cortas (*wide angle*).

3.2 Modelo de la Distorsión Radial

Para restaurar una imagen afectada por la distorsión primero es necesario evaluarla. Esto se hace mediante un modelo que permita, a partir de la posición distorsionada, calcular la posición real de cada uno de los píxeles de la imagen.

En la literatura se han propuesto varios modelos que representan los efectos de la distorsión radial [1] al [8], [12] al [14]. Por ejemplo, Tsai propone un modelo donde se requiere el conocimiento de algunas características físicas de la cámara que no siempre están disponibles [13]. Basu-Licardie y Devernay-Faugeras proponen modelos específicos para cámaras del tipo "fish-eye" en los que utilizan funciones logarítmicas [1] o trigonométricas [4]. Sin embargo, los modelos polinomiales, como el que se presenta a continuación, son los más utilizados [2], [3].

Sean (x, y) las coordenadas de un punto cualquiera de la imagen sin distorsión y r su distancia al punto principal $P = (X, Y)$ de dicha imagen; sean (x', y') las coordenadas de un punto cualquiera de la imagen distorsionada y r' su distancia al punto principal distorsionado $P' = (X', Y')$. Se pueden relacionar ambas distancias mediante una función de distorsión, $r' = f(r)$, la cual tendrá que ser invertible, monótona creciente y cumplir con las propiedades:

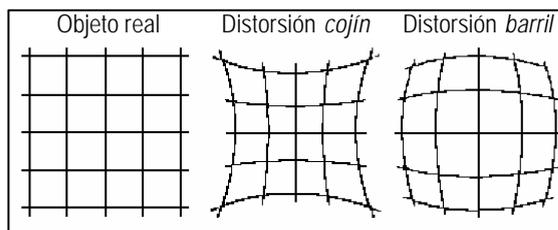


Figura N°. 1. Efectos de la aberración geométrica.

$$f(0) = f^{-1}(0) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{df(r)}{dr} = \lim_{r' \rightarrow 0} \frac{df(r')}{dr'} = 1 \quad (9)$$

Cualquier función que cumpla con los requerimientos anteriores puede aproximarse mediante una serie polinomial infinita. Entonces, el modelo de distorsión radial puede establecerse como la siguiente serie infinita (función polinomial):

$$r' = r(1 + d_1 r' + d_2 r'^2 + d_3 r'^3 + d_4 r'^4 + d_5 r'^5 + \dots)$$

La simetría radial de la distorsión y el hecho de que la imagen yace en un plano hacen que los términos de orden impar desaparezcan. Además, se ha mostrado que los términos de orden mayor a 5 influyen muy poco en el modelado de la distorsión radial [2, 3, 12]. Así, el modelo de distorsión radial queda como:

$$r' = r(1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4) \quad (10)$$

en donde los parámetros d_2 y d_4 determinan el tipo y la magnitud de la distorsión. Considérese ahora que el punto principal es idéntico en ambas imágenes, esto es $P = P'$; entonces, de acuerdo con este modelo, la posición correcta (x, y) correspondiente a un punto cualquiera de la imagen distorsionada (x', y') , se calcula con las siguientes relaciones:

$$x = X + \frac{x' - X}{1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4} \quad (11)$$

$$y = Y + \frac{y' - Y}{1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4}$$

en donde es necesario conocer la ubicación del punto principal y los parámetros d_2 y d_4 que determinan la distorsión. Considerando que el punto principal está en el origen de la imagen, el modelo inverso queda:

$$x' = x \frac{r'}{r} = x(1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4) \quad (12)$$

$$y' = y \frac{r'}{r} = y(1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4)$$

Considérese una tripleta de puntos en la imagen distorsionada, $p_i' = (x_i', y_i')$ con $i = 1, 2, 3$, correspondientes a puntos sobre una línea recta en la imagen sin distorsión que no pasa por el punto principal, es decir que $r_i' > 0$ y $r_i > 0$. Mientras que el área del polígono formado por esa tripleta en la imagen con distorsión es diferente de cero, en la imagen sin distorsión tendrá un valor nulo pues son colineales. El área de dicho polígono se calcula con:

$$A_{123} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

y, usando la relación dada en la ecuación (10), queda:

$$A_{123} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & r_1'/r_1 \\ x_2' & y_2' & r_2'/r_2 \\ x_3' & y_3' & r_3'/r_3 \end{bmatrix} \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1' r_2' r_3'} \quad (14)$$

esta área debe ser nula, pero como la relación de distancias al punto principal no puede ser nula, lo que vale cero es el determinante, entonces:

$$\det \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 + d_2 r_1'^2 + d_4 r_1'^4 \\ x_2' & y_2' & 1 + d_2 r_2'^2 + d_4 r_2'^4 \\ x_3' & y_3' & 1 + d_2 r_3'^2 + d_4 r_3'^4 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

desarrollando el determinante se tiene que:

$$0 = d_4 [r_1'^4 s_1 + r_2'^4 s_2 + r_3'^4 s_3] + d_2 [r_1'^2 s_1 + r_2'^2 s_2 + r_3'^2 s_3] + s_1 + s_2 + s_3 \quad (16)$$

con: $s_1 = x_2' y_3' - x_3' y_2'$, $s_2 = x_3' y_1' - x_1' y_3'$ y $s_3 = x_1' y_2' - x_2' y_1'$ relación que se puede escribir como una función lineal en los parámetros desconocidos, de modo que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{fJ} \quad (17)$$

$$\mathbf{y} = -(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$\mathbf{f} = [r_1'^2 s_1 + r_2'^2 s_2 + r_3'^2 s_3 \quad r_1'^4 s_1 + r_2'^4 s_2 + r_3'^4 s_3]$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Esta relación permite encontrar los valores de los parámetros que determinan el modelo de distorsión utilizado, mediante un proceso de optimización por mínimos cuadrados a partir de un conjunto de observaciones, de modo que:

$$\hat{\mathbf{J}}_{LS} = \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{fJ} - \mathbf{y}\|^2 \quad (18)$$

3.3 Identificación del modelo de distorsión

La corrección de la imagen afectada por distorsión radial usando la ecuación (11) necesita la identificación de los parámetros d_2 y d_4 así como las coordenadas (X, Y) del punto principal. Para ello se usa un proceso de mínimos cuadrados que minimiza un criterio basado en el área de los triángulos que forman las tripletas de puntos distorsionados, mismos que, en ausencia de distorsión debieran ser colineales.

Siguiendo el procedimiento propuesto por Bräuer y Voss [2], primero se hace una extracción de bordes en la imagen distorsionada para encontrar automáticamente segmentos de recta que se clasifican por su longitud, siendo más ponderados los más largos. Luego, sobre cada segmento se selecciona un conjunto de m puntos equiespaciados cuya posición se ubica con precisión de subpixel a fin de incrementar la exactitud del proceso de corrección.

En este procedimiento, cada uno de los k segmentos de recta está formado por m_k puntos de la imagen deformada, que se agrupan en el conjunto $L = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}, \dots, p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{km_k})$, y con los cuales se forman todas las tripletas posibles, las cuales se usarán en el proceso de optimización.

Este proceso iterativo se inicializa usando el centro de la imagen como punto principal $P_{[0]}$; mientras que el criterio para evaluar cada iteración es el promedio M de las distancias que hay entre los puntos corregidos y la recta ideal a la que pertenecen. Así, una vez que en la i -ésima iteración se han calculado los parámetros $d_{2[i]}$ y $d_{4[i]}$, se calculan las coordenadas correctas de los m_k puntos de la k -ésima recta y con ellos se construye un sistema de m_k ecuaciones del tipo $ax_i + by_i + c = 0$. Resolviendo este sistema para los parámetros a, b y c que definen la recta promedio en esa iteración, ya se puede calcular la distancia promedio M que hay entre los puntos corregidos y la recta promedio.

En cada iteración se construye un sistema de ecuaciones: una con cada una de las tripletas de puntos deformados del conjunto L y se resuelve la tarea de optimización definida por la ecuación (18) y se calculan los valores $d_{2[i]}$ y $d_{4[i]}$. El siguiente paso consiste en mejorar el valor de las coordenadas del punto principal. Considerando que los valores obtenidos para d_2 y d_4 son correctos, se prueban nuevos puntos dentro de una vecindad de tamaño apropiado y centrada en $P_{[i]}$ y se elige como $P_{[i+1]}$ al punto que produce el valor más pequeño para el criterio M . Esta iteración se repite nuevamente para calcular $d_{2[i+1]}$, $d_{4[i+1]}$, hasta que se cumpla el criterio de finalización, es decir cuando el valor de M no se reduce más o cuando los parámetros identificados no cambian significativamente.

Se elige ahora un conjunto de q puntos deformados caracterizados por sus distancias r_j' , cada uno de los cuales genera n valores corregidos r_j usando los n valores de d_2 y d_4 obtenidos en la optimización iterativa previa. Estos n valores se promedian y, junto con el valor r_j' correspondiente, se forman q pares (r_j, r_j') con los que se construye un sistema de q ecuaciones obtenidas a partir de la ecuación (10), de la forma:

$$(r' - r) = \begin{bmatrix} d_2 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rr'^2 \\ rr'^4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

que tiene la misma estructura lineal en los parámetros d_2 y d_4 (desconocidos) que la expresión (17). Por tanto, se puede aplicar un proceso de optimización por mínimos cuadrados para obtener los valores de dichos parámetros que minimizan esta última expresión y que, finalmente, representan el modelo de distorsión radial presente en la imagen.

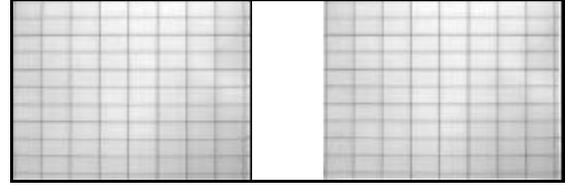


Figura Nº 2. Imágenes distorsionada y corregida del primer patrón de calibración (cámara Cucu Multi Media).

d_2	d_4	X'	Y'	M
1.318×10^{-7}	-7.961×10^{-12}	155	115	0.01038
1.649×10^{-7}	-8.511×10^{-12}	152	110	0.00934
1.804×10^{-7}	-8.565×10^{-12}	150	105	0.00906
1.890×10^{-7}	-8.442×10^{-12}	151	100	0.00815
1.917×10^{-7}	-8.268×10^{-12}	154	95	0.00791
1.878×10^{-7}	-7.981×10^{-12}	154	91	0.00791

Tabla Nº 1. Evolución de los parámetros (caso 1).

3.4. Corrección de la imagen

Una vez obtenidos los parámetros d_2, d_4, X y Y ya puede corregirse la imagen deformada, lo cual podría hacerse aplicando directamente la ecuación (11), pero se introducirían errores por redondeo en el cálculo de las posiciones, pues las coordenadas deben ser números enteros.

Para evitarlo se hace el cálculo inverso: se supone una imagen corregida cuyos píxeles están todos en blanco y se buscará cual es el nivel de gris que deben tener dichos píxeles, mediante la función inversa que se obtiene de las ecuaciones (10) y (12):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4} \\ y' &= \frac{y}{1 + d_2 r'^2 + d_4 r'^4} \end{aligned} \quad (20)$$

Es decir, dado un píxel en la imagen corregida de coordenadas (x, y) y, conociendo el modelo de corrección, se calculan las coordenadas (x', y') del punto distorsionado correspondiente, que tendrá, seguramente coordenadas reales y no enteras. Pero hay un problema, el cálculo de r' es muy complejo, por lo que se recurre al método iterativo de Newton, usando r como valor inicial, $r'_{[0]} = r$, para obtener el valor de r' como sigue:

$$r'_{[i+1]} = r \left(1 + d_2 r_{[i]}'^2 + d_4 r_{[i]}'^4 \right) \quad (21)$$

Comúnmente, después de cuatro o cinco iteraciones se obtiene un valor suficientemente exacto para r' , cuyas coordenadas no siempre coinciden con valores enteros $(x'_i, y'_i \notin \mathbb{N})$. En cuyo caso, el valor de gris correspondiente al nuevo píxel $(x_i, y_i \in \mathbb{N})$ se obtiene por interpolación bi-lineal de los niveles de gris de los cuatro píxeles vecinos en la imagen distorsionada.

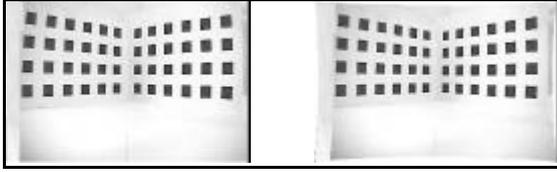


Figura N° 3. Imágenes distorsionada y corregida del segundo patrón de calibración (cámara K2D).

d_2	d_4	X'	Y'	M
9.551×10^{-9}	-4.792×10^{-13}	322	235	0.01135
7.507×10^{-9}	-4.675×10^{-13}	318	230	0.01135
2.557×10^{-7}	-6.122×10^{-12}	295	195	0.01849
2.780×10^{-7}	-6.369×10^{-12}	297	194	0.01807
2.633×10^{-7}	-6.341×10^{-12}	294	194	0.01807

Tabla N° 2. Evolución de los parámetros (caso 2).

4. Resultados

Con el fin de evaluar el método presentado, se usaron tres tipos diferentes de patrones de calibración, dos cámaras con diferente grado de distorsión, la cámara K2D del robot Khepera y la webcam Cucú de MetaMedia y se usaron imágenes de diferentes tamaños. En cada caso se determinaron los parámetros de distorsión y se analizaron sus variaciones para una misma cámara como función del patrón y del tamaño de imagen utilizados.

Caso 1. Usando una resolución de 640×480 píxeles en la webcam Cucu se capturó la imagen del primer patrón de calibración (figura N° 2.a). Primero se realizó un proceso de esqueletización de la imagen; luego se seleccionaron puntos alineados sobre las rectas distorsionadas con una separación de 20 píxeles. El proceso iterativo de identificación de parámetros realizó $n=6$ iteraciones (tabla N° 1), con cuyos resultados se formó el sistema de ecuaciones (19). La optimización de este sistema dio los valores finales: $d_2 = 1.743 \times 10^{-7}$, $d_4 = -8.288 \times 10^{-12}$ y $P' = (154, 91)$. Con estos valores se corrigió la distorsión obteniendo la imagen de la figura N° 2.b.

Caso 2. Con la cámara K2D se capturó la imagen (600×400 píxeles) del segundo patrón de calibración (figura N° 3.a). La lista de puntos se obtuvo mediante el cálculo del centro de gravedad de cada uno de los cuadros y la asociación de los cuadros alineados en forma vertical sobre la imagen de contornos. En la tabla N° 2 se reportan los resultados de las $n=5$ iteraciones obtenidos de la primera optimización; con ellos se hizo la segunda optimización obteniendo los siguientes valores de los parámetros de distorsión: $d_2 = 2.957 \times 10^{-7}$, $d_4 = -6.277 \times 10^{-12}$ y $P' = (294, 194)$. En la figura N° 3.b se muestra el resultado de la corrección correspondiente.

Calibración. Para mostrar el desempeño del algoritmo de calibración se tomó un escenario

compuesto de dos paneles a 90° uno del otro, con 16 cuadros distribuidos en una matriz de 4×4 (figura 4.a) El origen del sistema de coordenadas 3D del mundo, respecto al cual se especifican los puntos de control, se elige de manera arbitraria. Los puntos que pueden obtenerse con menos ruido son los centros de gravedad de los cuadros en la imagen binarizada y sin distorsión radial (figura 4.b). Las coordenadas 3D de los puntos de control y de sus correspondientes coordenadas 2D en la imagen que se muestran en la tabla 3 se usaron en el proceso de identificación de los parámetros del sistema de visión (calibración).

A la décima iteración el error ya no bajaba de 3.3349 píxeles y los parámetros t_{ij} identificados obtenidos se muestran en la tabla 4. Si a los datos de la tabla 4 se les aplica la transformación que resulta de invertir la ecuación (4), se obtienen los siguientes parámetros del sistema de formación de imágenes:

Punto principal de la imagen: (365.5313, 217.9416)
 Posición de la cámara: (31.4464, 13.8289, -0.2812)
 Factores de escala: (1161.3014, 1274.9136)
 Orientación de la cámara: $(-1.44^\circ, -0.19^\circ, -135.007^\circ)$

X (cm)	Y (cm)	Z (cm)	x (píxeles)	y (píxeles)
3.95	4.1	116.05	95	358
9.47	17.1	121.57	160	218
14.99	10.6	127.09	222	282
20.5	23.6	132.6	273	156
28.43	10.6	132.6	343	282
33.94	23.6	127.09	391	153
39.46	4.1	121.57	447	352
44.98	17.1	116.05	505	213

Tabla N° 3. Coordenadas de los puntos de control.

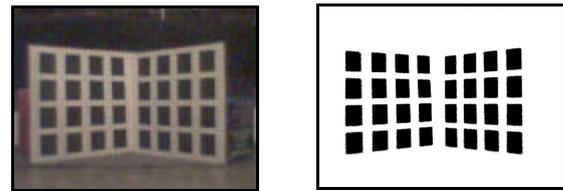


Figura N° 4. Patrón de calibración, original y binarizado.

t_{11} 12770.2596	t_{12} -37.5260	t_{13} 4067.0530	t_{14} -399710.6277
t_{21} -65.8506	t_{22} -13969.4786	t_{23} 2751.0528	t_{24} 196185.6229
t_{31} -0.0368	t_{32} 0.2796	t_{33} 11.0001	t_{34} 1.0000

Tabla N° 4. Matriz de parámetros t_{ij} identificados.

5. Conclusiones

Independientemente del patrón de calibración utilizado, el método presentado ofrece buenos resultados en la corrección de los efectos de la distorsión radial. Los cuales son aun mejores cuando se usan más puntos de referencia en el patrón de

calibración; aunque con pocos puntos también pueden obtenerse resultados satisfactorios siempre y cuando se elijan en los extremos de la imagen, zona donde se hacen más evidentes los efectos de la distorsión.

El uso de un modelo polinomial posibilita el desarrollo de algoritmos que aprovechan las características geométricas de los objetos presentes en la imagen, con un bajo costo computacional, lo cual los hace rápidos y eficientes. Además, por su carácter iterativo el método permite un ajuste rápido y aceptable de los parámetros de distorsión. Sin embargo, usar vecindades grandes para el ajuste del centro de distorsión genera desviaciones notables y resultados poco satisfactorios en la reducción de los efectos de la distorsión.

Aún cuando la magnitud de la distorsión radial sea chica, es necesario corregirla si se quiere obtener una información fidedigna sobre la geometría de la imagen. En el primer caso analizado se tiene una distorsión muy leve pero suficiente para impedir la detección de líneas rectas en las orillas de la imagen, necesarias en los procesos de reconstrucción 3D.

Por lo que concierne a la calibración, el poder expresar el modelo de perspectiva en forma lineal con respecto a los parámetros intrínsecos y extrínsecos del sistema de visión, ecuación (6), permite aplicar métodos de identificación relativamente exactos. Aunque la medición de los puntos de control y la dependencia del factor de escala con la distancia focal, entre otros factores, son fuente de errores, los cuales se reducen al utilizar más puntos de control.

Finalmente cabe mencionar que los resultados obtenidos en los procedimientos de calibración y de corrección de la distorsión radial fueron aplicados con éxito en el sistema de reconstrucción tridimensional monocular para la generación automática de mapas de un robot móvil [6].

7. Referencias

- [1] Basu A., S. Licardie. "Alternative models for fish-eye lenses". *Pattern Recognition Letters*, Vol. 16, pp.433-441, April (1995).
- [2] Bräuer-Burchardt, C., K. Voss. "Automatic lens distortion using single views". *Proc. Of 11 GAGM Symposium*, Kiel, Germany. Springer, pp. 187-194, (2000).
- [3] Bräuer-Burchardt, C., K. Voss. "A new method for determination and correction of weak radial lens distortion using single views". In Girod B, Niemann H and Seidel HP (edits.): *VMV 1999*, pp. 109-116, (1999).
- [4] Devernay, F., O. Faugeras. "Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments". *Proc of SPIE 2567*, San Diego, CA, USA, pp. 62-72, (1995).
- [5] Karras G., G. Mountrakis, P. Patias, E. Petsa. "Modelling distortion of super-wide-angle lenses for architectural and archaeological applications". *IAPRS*, Vol. 32, part 5, pp. 570-573, (1998).
- [6] Ibarra Zannatha, J. M., E. J. Iturbe Córdova. *Generación de Mapas Virtuales Interactivos para Robots Móviles usando la Reconstrucción 3D de Kanatani*. Sometido al Quinto Congreso Mexicano de Robótica ConRob 2003 de la AMRob. SLP. Agosto de 2003.
- [7] Nomura Y., M. Sagar, H. Naruse, A. Ide. "A simple calibration algorithm for high-distortion-lens camera". *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 14, pp. 1095-1099, (1992).
- [8] Prescott B., G. McLean. "Line-based correction of radial lens distortion". *GMIP (59)*, No. 1, pp. 39-47, (1997).
- [9] Serban R., J. S. Freeman. "Parameter identification for multibody dynamics systems". Department of Mechanical Engineering The University of Iowa, (1996).
- [10] Simoncelli E. "Least squares optimization". Center for Neural Science, and Courant Institute of Mathematical Sciences. February (1999).
- [11] Steger, C. "Evaluation of subpixel line and edge detection precision and accuracy". *IARPS Vol. XXXII*, Part 3/1, pp. 256-264, (1998).
- [12] Stein, G. P. "Lens distortion calibration using point correspondences". *Proc. IEEE CVPR*, San Juan de Puerto Rico, pp. 602-606, June (1997).
- [13] Tsai, R. Y. "A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses". *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-3. No. 4, pp. 323-344, August (1987).
- [14] Voss, K., C. Bräuer-Burchardt. "Rectificación monocular de imágenes". *Computación y Sistemas*. Vol. 4. pp. 249-263, (2001).